अध्ययन नोट्स: द्रव्यमान केंद्र और जड़त्व आघूर्ण

विषय सूची

1. द्रव्यमान केंद्र

1.1 परिभाषा और मुख्य अवधारणाएँ

द्रव्यमान केंद्र (COM) वह बिंदु है जहाँ किसी वस्तु का सम्पूर्ण द्रव्यमान गणना के उद्देश्य से केंद्रित माना जा सकता है। यह एक प्रणाली में सभी कणों की उनके द्रव्यमानों के अनुसार भारित औसत स्थिति होती है।

1.2 प्रमेय और सिद्धांत

- **समानांतर अक्ष प्रमेय**: किसी अक्ष के समानांतर किसी अन्य अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण की गणना, द्रव्यमान केंद्र से गुजरने वाले अक्ष के जड़त्व आघूर्ण में दोनों अक्षों के बीच की दूरी के वर्ग और द्रव्यमान के गुणनफल को जोड़कर की जा सकती है।

$$I = I_{\text{COM}} + Md^2$$

  जहाँ d दोनों अक्षों के बीच की दूरी है।

- **लंबवत अक्ष प्रमेय**: किसी समतल वस्तु के लिए, उसके तल के लंबवत अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण, तल में स्थित दो परस्पर लंबवत अक्षों के परितः जड़त्व आघूर्णों के योग के बराबर होता है।

$$I_z = I_x + I_y$$

1.3 उदाहरण और अनुप्रयोग

- **उदाहरण 1**: लंबाई L वाली एक समरूप छड़ का द्रव्यमान केंद्र $\frac{L}{2}$ पर होता है।
- **उदाहरण 2**: एक खोखले गोले का द्रव्यमान केंद्र उसके ज्यामितीय केंद्र पर होता है।
- **अनुप्रयोग**: इंजीनियरिंग में संतुलन बिंदु निर्धारित करने, भौतिकी में घूर्णी गतिकी के लिए, और खगोल विज्ञान में खगोलीय पिंडों की स्थिरता के विश्लेषण में उपयोग होता है।

1.4 सूत्र और समीकरण

वस्तु	द्रव्यमान केंद्र स्थिति	सूत्र
समरूप छड़	$\frac{L}{2}$	$\vec{R}_{\text{COM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$
खोखला गोला	गोले का केंद्र	$\vec{R}_{\text{COM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$
ठोस बेलन	सममिति अक्ष	$\vec{R}_{\text{COM}} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$

2. जड़त्व आघूर्ण

2.1 परिभाषा और मुख्य अवधारणाएँ

जड़त्व आघूर्ण (MOI) किसी वस्तु की किसी विशेष अक्ष के परितः घूर्णी त्वरण के प्रति प्रतिरोध को मापता है। यह घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है।

2.2 प्रमेय और सिद्धांत

- **समानांतर अक्ष प्रमेय**: अनुभाग 1.2 में वर्णित।
- **लंबवत अक्ष प्रमेय**: अनुभाग 1.2 में वर्णित।
- **परिक्रमण त्रिज्या**: वह दूरी k जहाँ घूर्णन अक्ष से सम्पूर्ण द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण बदले बिना केंद्रित माना जा सकता है:

$$I = Mk^2$$

2.3 उदाहरण और अनुप्रयोग

- **उदाहरण 1**: अपने केन्द्रीय अक्ष के परितः घूर्णन करने वाले ठोस डिस्क का $I = \frac{1}{2}MR^2$ होता है।
- **उदाहरण 2**: अपने सिरे के परितः घूर्णन करने वाली एक पतली छड़ का $I = \frac{1}{3}ML^2$ होता है।
- **अनुप्रयोग**: फ्लाइव्हील डिजाइन, घूर्णी गति विश्लेषण, और बलाघूर्ण आवश्यकताओं की गणना में उपयोग होता है।

2.4 सूत्र और समीकरण

वस्तु	घूर्णन अक्ष	सूत्र
ठोस डिस्क	केन्द्रीय अक्ष	$I = \frac{1}{2}MR^2$
पतली छड़	छड़ का सिरा	$I = \frac{1}{3}ML^2$
खोखला बेलन	केन्द्रीय अक्ष	$I = MR^2$
ठोस गोला	केन्द्रीय अक्ष	$I = \frac{2}{5}MR^2$

3. परिक्रमण त्रिज्या

- **उदाहरण**: ठोस बेलन के लिए, $k = R$, जहाँ R बेलन की त्रिज्या है।
- **अनुप्रयोग**: संरचनात्मक इंजीनियरिंग में भार वितरण विश्लेषण और भौतिकी में घूर्णी गतिकी को सरल बनाने में उपयोग होता है।

4. मुख्य अवधारणाओं का सारांश

मुख्य अवधारणाएँ

- **द्रव्यमान केंद्र**: किसी प्रणाली में द्रव्यमान की औसत स्थिति।
- **जड़त्व आघूर्ण**: घूर्णी त्वरण के प्रति प्रतिरोध; द्रव्यमान वितरण पर निर्भर।
- **प्रमेय**: समानांतर और लंबवत अक्ष प्रमेय जड़त्व आघूर्ण गणना को सरल करते हैं।
- **परिक्रमण त्रिज्या**: जटिल द्रव्यमान वितरण को एकल दूरी में सरल बनाती है।

तुलनात्मक सारणी

अवधारणा	विवरण	सूत्र
द्रव्यमान केंद्र	द्रव्यमान की औसत स्थिति	$\vec{R}_{COM} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$
जड़त्व आघूर्ण	घूर्णी त्वरण के प्रति प्रतिरोध	$I = \sum m_i r_i^2$
परिक्रमण त्रिज्या	द्रव्यमान सांद्रण के लिए तुल्य दूरी	$I = Mk^2$