

अध्ययन नोट्स: प्रायिकता एवं सांख्यिकी

1. प्रायिकता का परिचय

1.1 प्रायिकता की परिभाषा

1.2 मूल अवधारणाएँ

- यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment):** एक ऐसा प्रयोग जिसका परिणाम अनिश्चित हो।
- प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space):** यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित परिणामों का समुच्चय।
- घटना (Event):** प्रतिदर्श समष्टि का एक उपसमुच्चय।

1.3 प्रायिकता के अभिगृहीत

- अक्रणात्मकता (Non-negativity):** किसी भी घटना E के लिए $P(E) \geq 0$ ।
- प्रसामान्यीकरण (Normalization):** $P(S) = 1$, जहाँ S प्रतिदर्श समष्टि है।
- योगात्मकता (Additivity):** पारस्परिक अपवर्जी घटनाओं E_1, E_2, \dots के लिए,
 $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + \dots$ ।

2. यादृच्छिक चर एवं वितरण

2.1 यादृच्छिक चर

- असतत यादृच्छिक चर (Discrete Random Variable):** गणनीय संख्या में विशिष्ट मान लेता है।
- सतत यादृच्छिक चर (Continuous Random Variable):** एक परिसर के भीतर अगणनीय संख्या में मान लेता है।

2.2 प्रायिकता वितरण

प्रकार	विवरण	उदाहरण
असतत (Discrete)	असतत मानों को प्रायिकताएँ निर्दिष्ट करता है	द्विपद, प्वासों
सतत (Continuous)	अंतरालों पर प्रायिकताओं का वर्णन करता है	सामान्य, घातांकीय

2.3 संचयी वितरण फलन (CDF)

3. प्रत्याशित मान एवं प्रसरण

3.1 प्रत्याशित मान (माध्य)

- असतत यादृच्छिक चर के लिए:

$$E(X) = \sum x_i \cdot P(x_i)$$

- सतत यादृच्छिक चर के लिए:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

3.2 प्रसरण

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

4. बर्नौली एवं द्विपद वितरण

4.1 बर्नौली वितरण

- प्रायिकता द्रव्यमान फलन (PMF):

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1 - x} \quad \text{जहाँ } x = 0, 1$$

4.2 द्विपद वितरण

- PMF:

$$P(X = k) = {}^nC_k p^k (1 - p)^{n - k}$$

जहाँ n परीक्षणों की संख्या, k सफलताओं की संख्या, और p सफलता की प्रायिकता है।

- माध्य: $E(X) = np$
- प्रसरण: $Var(X) = np(1 - p)$

5. प्रायिकता वितरण एवं उनके गुण

5.1 असतत वितरण

वितरण	PMF	माध्य	प्रसरण
बर्नौली	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
द्विपद	${}^nC_k p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
प्वासों	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ	λ

5.2 सतत वितरण

वितरण	PDF	माध्य	प्रसरण
सामान्य	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
घातांकीय	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

6. केंद्रीय सीमा प्रमेय

6.1 कथन

6.2 निहितार्थ

- बड़े n के लिए, \bar{x} का वितरण लगभग सामान्य होता है।
- आत्मविश्वास अंतराल निर्माण और परिकल्पना परीक्षण के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

7. परिकल्पना परीक्षण

7.1 शून्य एवं वैकल्पिक परिकल्पना

- शून्य परिकल्पना (H_0): कोई प्रभाव या अंतर न होने का कथन।
- वैकल्पिक परिकल्पना (H_1): शून्य परिकल्पना का विरोध करने वाला कथन।

7.2 सार्थकता स्तर

- सार्थकता स्तर α शून्य परिकल्पना को सत्य होने पर उसे अस्वीकार करने की प्रायिकता है।

7.3 परीक्षण सांख्यिकी

- सामान्य परीक्षण सांख्यिकी में Z-स्कोर, t-स्कोर, काई-वर्ग एवं F-सांख्यिकी शामिल हैं।

8. आत्मविश्वास अंतराल

8.1 परिभाषा

8.2 माध्य के लिए आत्मविश्वास अंतराल

- ज्ञात प्रसरण वाली सामान्य जनसंख्या के लिए:

$$\bar{x} \pm z^* \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- अज्ञात प्रसरण वाले बड़े नमूने के लिए:

$$\bar{x} \pm t^* \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

9. मुख्य सूत्रों का सारांश

सूत्र	विवरण
$E(X) = \sum x_i \cdot P(x_i)$	असतत यादृच्छिक चर का प्रत्याशित मान
$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	यादृच्छिक चर का प्रसरण
$P(X = k) = {}^nC_k p^k (1-p)^{n-k}$	द्विपद PMF
$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$	नमूना माध्य के लिए Z-स्कोर

10. निष्कर्ष

- प्रायिकता एवं सांख्यिकी आँकड़ों में अनिश्चितता और परिवर्तनशीलता को समझने की आधारशिला प्रदान करते हैं।
- मुख्य अवधारणाओं में प्रायिकता वितरण, प्रत्याशित मान, प्रसरण और केंद्रीय सीमा प्रमेय शामिल हैं।
- ये उपकरण आँकड़ा विश्लेषण, परिकल्पना परीक्षण और सूचित निर्णय लेने के लिए आवश्यक हैं।

12. आभार

- आधारभूत सामग्री प्रदान करने के लिए मूल सामग्री निर्माताओं के प्रति विशेष धन्यवाद।
- इस अध्ययन गाइड में योगदान देने वाले शिक्षकों और शोधकर्ताओं के प्रति कृतज्ञता।

13. अतिरिक्त संसाधन

- सक्रिय उपकरण: [Desmos Graphing Calculator](#)
- अभ्यास समस्याएँ: [Probability and Statistics Exercises](#)
- वीडियो ट्यूटोरियल: [YouTube - Probability and Statistics Playlist]

