वेक्टर बीजगणित अध्ययन नोट्स

विषय सूची

1. अदिश और सदिश गुणनफल
2. वेक्टर बीजगणित सारांश
3. रैखिक संयोजन, रैखिक स्वतंत्रता और आश्रितता

अदिश और सदिश गुणनफल

अदिश गुणनफल (डॉट गुणनफल)

परिभाषा: दो सदिशों $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ का अदिश गुणनफल इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

जहाँ θ सदिशों के बीच का कोण है।

मुख्य गुण: - **क्रमविनिमेय**: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ - **वितरणात्मक**: $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ - **शून्य सदिश**: $\mathbf{a}\cdot 0 = 0$

ज्यामितीय व्याख्या: - एक सदिश के दूसरे सदिश पर प्रक्षेपण को दर्शाता है, जो दूसरे सदिश के परिमाण से गुणा किया जाता है।

उदाहरण:

$$\text{यदि } \mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3], \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3], \text{ तो } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

सदिश गुणनफल (क्रॉस गुणनफल)

परिभाषा: दो सदिशों $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ का सदिश गुणनफल इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\mathbf{n}$$

जहाँ $\mathbf{n}$, $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ दोनों के लम्बवत इकाई सदिश है (दायाँ हाथ नियम)।

मुख्य गुण: - **प्रतिक्रमविनिमेय**: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ - **वितरणात्मक**: $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$ - **शून्य सदिश**: $\mathbf{a}\times 0 = 0$

ज्यामितीय व्याख्या: - परिमाण सदिशों द्वारा निर्मित समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल को दर्शाता है। - दिशा $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ वाले तल के लम्बवत होती है।

उदाहरण:

यदि $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3], \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$, तो $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

वेक्टर बीजगणित सारांश

रैखिक संयोजन

परिभाषा: एक सदिश $\mathbf{r}$, सदिशों $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$ का रैखिक संयोजन है, यदि:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} + \ldots$$

जहाँ $x, y, z, \ldots$ अदिश हैं।

उदाहरण: $\mathbf{r} = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ का रैखिक संयोजन है।

रैखिक स्वतंत्रता और आश्रितता

परिभाषा: सदिश $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$: - **रैखिक रूप से आश्रित** होंगे यदि कोई अशून्य अदिश α और β मौजूद हों जैसे कि $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0$। - अन्यथा **रैखिक रूप से स्वतंत्र** होंगे।

मुख्य शर्तें: 1. **समान्तर सदिश**: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (अर्थात् $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$)। 2. **संरेख सदिश**: $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ एक ही रेखा पर स्थित हैं। 3. **शून्य क्रॉस गुणनफल**: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$।

उदाहरण: यदि $\mathbf{a} = [1, 2]$ और $\mathbf{b} = [2, 4]$, तो $\mathbf{a}$ और $\mathbf{b}$ रैखिक रूप से आश्रित हैं क्योंकि $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$।

रैखिक संयोजन, रैखिक स्वतंत्रता और आश्रितता

मुख्य अवधारणाएँ

- **रैखिक संयोजन**: एक सदिश जिसे अन्य सदिशों के अदिश गुणनफलों के योग के रूप में व्यक्त किया जाता है।
- **रैखिक आश्रितता**: सदिश जिन्हें एक-दूसरे के अदिश गुणजों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
- **रैखिक स्वतंत्रता**: सदिश जिन्हें एक-दूसरे के अदिश गुणजों के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

रैखिक आश्रितता की शर्तें

- **अशून्य अदिश**: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = 0$ जहाँ $\alpha, \beta \neq 0$।
- **समान्तर/संरेख**: सदिश एक ही या विपरीत दिशाओं में निर्देशित हों।
- **शून्य क्रॉस गुणनफल**: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$।

उदाहरण

यदि $\mathbf{a} = [3, 6]$ और $\mathbf{b} = [1, 2]$, तो $\mathbf{a} = 3\mathbf{b}$, अतः ये रैखिक रूप से आश्रित हैं।