

# अध्ययन नोट्स: हाइपरबोला अवधारणाएँ

## विषयसूची

1. हाइपरबोला का परिचय
2. मूल परिभाषाएँ
3. हाइपरबोला के मानक समीकरण
4. मुख्य शब्द और अवधारणाएँ
5. ज्यामितीय गुणधर्म
6. हाइपरबोला की अनन्तस्पर्शी
7. स्पर्श रेखाएँ और अभिलंब
8. संयुग्मी हाइपरबोला
9. आयताकार हाइपरबोला
10. अनुप्रयोग और उदाहरण
11. सारांश और मुख्य बिंदु

## 1. हाइपरबोला का परिचय

एक **हाइपरबोला** एक शंकु खण्ड है जिसे समतल में सभी बिंदुओं के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया जाता है, जहाँ दो निश्चित बिंदुओं (फोकस) से दूरी का निरपेक्ष अंतर स्थिर होता है। यह परवलय और दीर्घवृत्त के साथ-साथ शंकु खण्ड के तीन प्रकारों में से एक है।

## 2. मूल परिभाषाएँ

- **फोकस**: हाइपरबोला को परिभाषित करने के लिए उपयोग किया जाने वाला एक निश्चित बिंदु।
- **डायरेक्ट्रिक्स**: हाइपरबोला को परिभाषित करने के लिए उपयोग की जाने वाली एक निश्चित रेखा।
- **उत्केंद्रता (e)**: हाइपरबोला के लिए,  $e > 1$ ।
- **अनुप्रस्थ अक्ष**: दोनों शीर्षों को मिलाने वाला रेखाखंड।
- **संयुग्मी अक्ष**: अनुप्रस्थ अक्ष के लंबवत रेखाखंड जो केंद्र से गुजरता है।

## 3. हाइपरबोला के मानक समीकरण

### 3.1 क्षैतिज अनुप्रस्थ अक्ष

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- केंद्र:  $(0, 0)$
- फोकाई:  $(\pm c, 0)$ , जहाँ  $c^2 = a^2 + b^2$
- शीर्ष:  $(\pm a, 0)$
- अनन्तस्पर्शी:  $y = \pm \frac{b}{a}x$

### 3.2 ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ अक्ष

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

- केंद्र:  $(0, 0)$
- फोकाई:  $(0, \pm c)$ , जहाँ  $c^2 = a^2 + b^2$
- शीर्ष:  $(0, \pm a)$
- अनन्तस्पर्शी:  $y = \pm \frac{a}{b}x$

## 4. मुख्य शब्द और अवधारणाएँ

शब्द	परिभाषा
शीर्ष	वह बिंदु जहाँ हाइपरबोला अनुप्रस्थ अक्ष को काटता है।
केंद्र	दोनों शीर्षों के बीच का मध्यबिंदु।
फोकस	हाइपरबोला के आकार को परिभाषित करने के लिए उपयोग किया जाने वाला आंतरिक बिंदु।
अनन्तस्पर्शी	वह रेखा जिसकी ओर हाइपरबोला अनंत तक पहुँचता है लेकिन छूता नहीं।
संयुग्मी अक्ष	केंद्र से गुजरने वाला, अनुप्रस्थ अक्ष के लंबवत रेखाखंड।
उत्केन्द्रता	यह मापता है कि हाइपरबोला कितना "खिंचा हुआ" है। हाइपरबोला के लिए, $e > 1$ .

## 5. ज्यामितीय गुणधर्म

- **सममिति:** हाइपरबोला अपने अनुप्रस्थ और संयुग्मी अक्षों दोनों के प्रति सममित होता है।
- **अनन्तस्पर्शी:** ये सीधी रेखाएँ हैं जिनकी ओर हाइपरबोला अनंत तक पहुँचता है लेकिन प्रतिच्छेद नहीं करता।
- **नाभिलंब:** अनुप्रस्थ अक्ष के लंबवत एक फोकस से गुजरने वाली जीवा। इसकी लंबाई  $\frac{2b^2}{a}$  है।
- **डायरेक्ट्रिक्स:** एक रेखा जिसे हाइपरबोला पर किसी बिंदु से फोकस की दूरी और उस बिंदु से डायरेक्ट्रिक्स की दूरी का अनुपात स्थिर (उत्केन्द्रता) होता है।

## 6. हाइपरबोला की अनन्तस्पर्शी

- **परिभाषा:** अनन्तस्पर्शी वे रेखाएँ हैं जिनकी ओर हाइपरबोला अनंत तक पहुँचता है लेकिन प्रतिच्छेद नहीं करता।
- **समीकरण:**
- क्षैतिज अनुप्रस्थ अक्ष के लिए:  $y = \pm \frac{b}{a}x$
- ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ अक्ष के लिए:  $y = \pm \frac{a}{b}x$
- **महत्व:** अनन्तस्पर्शी हाइपरबोला के "खुलने की दिशा" को परिभाषित करते हैं और ग्राफ खींचने में सहायता करते हैं।

## 7. स्पर्श रेखाएँ और अभिलंब

### 7.1 हाइपरबोला की स्पर्श रेखा

मानक हाइपरबोला  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के लिए, बिंदु  $(x_1, y_1)$  पर स्पर्श रेखा का समीकरण होता है:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

### 7.2 हाइपरबोला का अभिलंब

हाइपरबोला पर बिंदु  $(x_1, y_1)$  पर अभिलंब, उस बिंदु पर स्पर्श रेखा के लंबवत होता है।

## 8. संयुग्मी हाइपरबोला

- **परिभाषा:**  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  का संयुग्मी हाइपरबोला  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  होता है।
- **संबंध:** संयुग्मी हाइपरबोला के समान अनन्तस्पर्शी होते हैं।
- **फोकाइ और शीर्ष:** संयुग्मी हाइपरबोला में फोकाइ और शीर्ष परस्पर विनिमयित होते हैं।

## 9. आयताकार हाइपरबोला

- **परिभाषा:** एक हाइपरबोला जिसकी अनन्तस्पर्शी आपस में लंबवत होती हैं।
- **समीकरण:**  $xy = c^2$  (घुमाया हुआ रूप), या  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ।
- **गुणधर्म:**
- अनन्तस्पर्शी  $y = x$  और  $y = -x$  होती हैं।
- उत्केन्द्रता:  $e = \sqrt{2}$ ।
- अनुप्रस्थ और संयुग्मी अक्ष लंबाई में बराबर होते हैं।

## 10. अनुप्रयोग और उदाहरण

अनुप्रयोग	विवरण
भौतिक विज्ञान	सापेक्षता और व्युत्क्रम-वर्ग नियमों के तहत गति के अध्ययन में उपयोग किया जाता है।
इंजीनियरिंग	परावर्तकों और एंटेनाओं के डिज़ाइन में उपयोग किया जाता है।
नेविगेशन	अतिपरवल्यिक नेविगेशन प्रणालियों (जैसे LORAN) में उपयोग किया जाता है।
गणित	शंकु खण्डों और विश्लेषणात्मक ज्यामिति के अध्ययन में उपयोग किया जाता है।

## 11. सारांश और मुख्य बिंदु

- हाइपरबोला को बिंदुओं के समुच्चय के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ दो फोकाइ से दूरी का निरपेक्ष अंतर स्थिर होता है।
- हाइपरबोला के मानक समीकरण इस बात पर निर्भर करते हैं कि अनुप्रस्थ अक्ष क्षैतिज है या ऊर्ध्वाधर।
- हाइपरबोला की उत्केंद्रता हमेशा 1 से अधिक होती है।
- अनन्तस्पर्शी वे रेखाएँ हैं जिनकी ओर हाइपरबोला अनंत तक पहुँचता है लेकिन छूता नहीं।
- संयुग्मी हाइपरबोलाएँ समान अनन्तस्पर्शी साझा करती हैं।
- आयताकार हाइपरबोला में लंबवत अनन्तस्पर्शी होती हैं और इनका व्यावहारिक अनुप्रयोगों में अक्सर उपयोग किया जाता है।

