

अध्ययन नोट्स: परवलय (पराबोला)

विषयसूची

1. परवलय का परिचय
2. मुख्य अवधारणाएँ
3. महत्वपूर्ण परिभाषाएँ
4. समीकरण और सूत्र
5. ज्यामितीय गुणधर्म
6. अनुप्रयोग और उदाहरण
7. हल की गई समस्याएँ
8. सारांश और मुख्य बिंदु

1. परवलय का परिचय

एक **परवलय** एक शंकु अनुभाग है जो तब बनता है जब एक समतल शंकु को उसके पार्श्व कोण के समान कोण पर काटता है। इसे उन सभी बिंदुओं के समुच्चय के रूप में भी परिभाषित किया जाता है जो एक निश्चित बिंदु (जिसे **फोकस** कहते हैं) और एक निश्चित रेखा (जिसे **नियता** कहते हैं) से समान दूरी पर होते हैं।

2. मुख्य अवधारणाएँ

2.1 परिभाषा

परवलय उन बिंदुओं का बिन्दुपथ है जो एक निश्चित बिंदु (फोकस) और एक निश्चित रेखा (नियता) से समान दूरी पर होते हैं।

2.2 मानक रूप

- ऊर्ध्वाधर परवलय: $y = ax^2 + bx + c$
- क्षैतिज परवलय: $x = ay^2 + by + c$

2.3 शीर्ष रूप

- ऊर्ध्वाधर: $y = a(x - h)^2 + k$
- क्षैतिज: $x = a(y - k)^2 + h$

जहाँ: - (h, k) परवलय का **शीर्ष** है। - a परवलय की दिशा और चौड़ाई निर्धारित करता है।

3. महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

3.1 फोकस

फोकस परवलय के अंदर स्थित एक निश्चित बिंदु होता है, जिससे परवलय पर किसी भी बिंदु की दूरी, उस बिंदु से नियता की दूरी के बराबर होती है।

3.2 नियता

नियता परवलय के बाहर स्थित एक निश्चित रेखा होती है, जिससे परवलय पर किसी बिंदु की दूरी, उस बिंदु से फोकस की दूरी के बराबर होती है।

3.3 सममिति का अक्ष

सममिति का अक्ष वह रेखा है जो परवलय को दो दर्पण-प्रतिबिम्ब भागों में विभाजित करती है। यह शीर्ष और फोकस से गुजरती है।

3.4 नाभिलंब

नाभिलंब एक रेखा खंड है जो फोकस से गुजरता है और सममिति के अक्ष के लंबवत होता है, जिसके अंतर्बिंदु परवलय पर स्थित होते हैं।

4. समीकरण और सूत्र

4.1 परवलय का मानक समीकरण

- ऊर्ध्वाधर: $y = \frac{1}{4p}(x - h)^2 + k$, जहाँ p शीर्ष से फोकस की दूरी है।
- क्षैतिज: $x = \frac{1}{4p}(y - k)^2 + h$

4.2 मानक परवलय के लिए फोकस और नियता

- ऊर्ध्वाधर: फोकस = $(h, k + p)$, नियता = $y = k - p$
- क्षैतिज: फोकस = $(h + p, k)$, नियता = $x = h - p$

4.3 नाभिलंब की लंबाई

- लंबाई = $4p$

5. ज्यामितीय गुणधर्म

गुण	विवरण
शीर्ष	वह बिंदु जहाँ परवलय की दिशा परिवर्तित होती है।
फोकस	परवलय के आकार को परिभाषित करने वाला एक आंतरिक बिंदु।
नियता	परवलय के आकार को परिभाषित करने वाली एक बाह्य रेखा।
सममिति का अक्ष	वह रेखा जो परवलय को दो समान भागों में विभाजित करती है।
नाभिलंब	फोकस से गुजरने वाला एक रेखा खंड, सममिति के अक्ष के लंबवत।

6. अनुप्रयोग और उदाहरण

6.1 वास्तविक-विश्व अनुप्रयोग

- भौतिकी: प्रक्षेप्य का प्रक्षेप पथ।
- इंजीनियरिंग: उपग्रह डिज़ाइन और कार हेडलाइट्स में परवलयिक परावर्तक।
- गणित: द्विघात समीकरणों और शंकु अनुभागों में उपयोग।

6.2 उदाहरण 1: ऊर्ध्वाधर परवलय

दिया गया समीकरण: $y = 2(x - 3)^2 + 4$

- शीर्ष: (3, 4)
- फोकस: $(3, 4 + \frac{1}{4 \cdot 2}) = (3, 4.125)$
- नियता: $y = 4 - \frac{1}{4 \cdot 2} = 3.875$

7. हल की गई समस्याएँ

समस्या 1: उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (2, 3) और फोकस (2, 5) पर है।

- चरण 1: परवलय का प्रकार पहचानें (ऊर्ध्वाधर)।
- चरण 2: $p = 5 - 3 = 2$ ज्ञात करें।
- चरण 3: मानक रूप का उपयोग करें: $y = \frac{1}{4p}(x - h)^2 + k = \frac{1}{8}(x - 2)^2 + 3$

समस्या 2: एक क्षैतिज परवलय की नियता ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(-1, 2)$ और फोकस $(1, 2)$ पर है।

- चरण 1: परवलय का प्रकार पहचानें (क्षैतिज)।
- चरण 2: $p = 1 - (-1) = 2$ ज्ञात करें।
- चरण 3: नियता $= x = h - p = -1 - 2 = -3$

8. सारांश और मुख्य बिंदु

- परवलय एक शंकु अनुभाग है जिसे फोकस और नियता द्वारा परिभाषित किया जाता है।
- मानक रूपों में ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज परवलय शामिल हैं।
- **शीर्ष, फोकस, और नियता** परवलय के मुख्य घटक हैं।
- **नाभिलंब** अतिरिक्त ज्यामितीय जानकारी प्रदान करता है।
- परवलय के भौतिकी और इंजीनियरिंग में अनेक वास्तविक-विश्व अनुप्रयोग हैं।

