प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन अध्ययन नोट्स

विषयसूची

1. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का परिचय

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, मानक त्रिकोणमितीय फलनों के प्रतिलोम होते हैं। ये फलन कोण का माप ज्ञात करने में उपयोगी होते हैं जब समकोण त्रिभुज में भुजाओं का अनुपात ज्ञात हो।

2. मूल परिभाषाएँ और गुणधर्म

2.1 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषा

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है:

- **आर्कसाइन** (arcsin): साइन का प्रतिलोम
- **आर्ककोसाइन** (arccos): कोसाइन का प्रतिलोम
- **आर्कटैन्जेंट** (arctan): टैन्जेंट का प्रतिलोम
- **आर्ककोटैन्जेंट** (arccot): कोटैन्जेंट का प्रतिलोम
- **आर्कसेकेंट** (arcsec): सेकेंट का प्रतिलोम
- **आर्ककोसेकेंट** (arccsc): कोसेकेंट का प्रतिलोम

3. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन के सर्वसमिकाएँ

3.1 मूल सर्वसमिकाएँ

फलन	सर्वसमिका	प्रांत	परिसर
arcsin(x)	$\sin^{-1}(x)$	[-1, 1]	[-π/2, π/2]
arccos(x)	$\cos^{-1}(x)$	[-1, 1]	[0, π]
arctan(x)	$\tan^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	(-π/2, π/2)
arccot(x)	$\cot^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	(0, π)
arcsec(x)	$\sec^{-1}(x)$	(-∞, -1] ∪ [1, ∞)	[0, π/2) ∪ (π/2, π]
arccsc(x)	$\csc^{-1}(x)$	(-∞, -1] ∪ [1, ∞)	[-π/2, 0) ∪ (0, π/2]

4. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के बीच संबंध

4.1 पूरक कोण संबंध

- **arcsin(x) + arccos(x) = π/2**
- **arctan(x) + arccot(x) = π**
- **arctan(x) = arccot(1/x)** जब x > 0

4.2 व्युत्क्रम संबंध

- **arcsin(x) = arccsc(1/x)** जब |x| ≥ 1
- **arccos(x) = arcsec(1/x)** जब |x| ≥ 1

5. आलेख और प्रांत/परिसर

5.1 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख

- **arcsin(x)**: प्रांत [-1, 1], परिसर [-π/2, π/2]
- **arccos(x)**: प्रांत [-1, 1], परिसर [0, π]
- **arctan(x)**: सभी वास्तविक संख्याओं पर परिभाषित, परिसर (-π/2, π/2)
- **arccot(x)**: सभी वास्तविक संख्याओं पर परिभाषित, परिसर (0, π)
- **arcsec(x)**: प्रांत (-∞, -1] ∪ [1, ∞), परिसर [0, π/2) ∪ (π/2, π]
- **arccsc(x)**: प्रांत (-∞, -1] ∪ [1, ∞), परिसर [-π/2, 0) ∪ (0, π/2]

6. महत्वपूर्ण सूत्र और समीकरण

6.1 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के सूत्र

6.1.1 योग एवं अंतर सूत्र

- $\sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(y) = \sin^{-1}(x\sqrt{(1 - y^2)} + y\sqrt{(1 - x^2)})$
- $\cos^{-1}(x) + \cos^{-1}(y) = \cos^{-1}(xy - \sqrt{(1 - x^2)}\sqrt{(1 - y^2)})$
- $\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}((x + y)/(1 - xy))$ जब $xy < 1$
- $\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}((x - y)/(1 + xy))$

6.1.2 द्विक कोण सूत्र

- $2 \sin^{-1}(x) = \sin^{-1}(2x\sqrt{(1 - x^2)})$ जब $|x| \le 1/\sqrt{2}$
- $2 \sin^{-1}(x) = \pi - \sin^{-1}(2x\sqrt{(1 - x^2)})$ जब $1/\sqrt{2} < |x| \le 1$
- $2 \cos^{-1}(x) = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$
- $2 \tan^{-1}(x) = \tan^{-1}(2x/(1 - x^2))$ जब $|x| < 1$
- $2 \tan^{-1}(x) = \pi + \tan^{-1}(2x/(1 - x^2))$ जब $x > 1$
- $2 \tan^{-1}(x) = -\pi + \tan^{-1}(2x/(1 - x^2))$ जब $x < -1$

7. मुख्य सूत्रों और गुणधर्मों का सारांश

7.1 सारांश तालिका

फलन	सूत्र	प्रांत	परिसर
arcsin(x)	$\sin^{-1}(x)$	[-1, 1]	[-π/2, π/2]
arccos(x)	$\cos^{-1}(x)$	[-1, 1]	[0, π]
arctan(x)	$\tan^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	(-π/2, π/2)
arccot(x)	$\cot^{-1}(x)$	$\mathbb{R}$	(0, π)
arcsec(x)	$\sec^{-1}(x)$	(-∞, -1] ∪ [1, ∞)	[0, π/2) ∪ (π/2, π]
arccsc(x)	$\csc^{-1}(x)$	(-∞, -1] ∪ [1, ∞)	[-π/2, 0) ∪ (0, π/2]

7.2 मुख्य सूत्र

- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \pi/2$
- $\arctan(x) + \text{arccot}(x) = \pi$

- $\arcsin(x) = \text{arccsc}(1/x)$
- $\arccos(x) = \text{arcsec}(1/x)$

7.3 द्विक कोण सूत्र

- $2 \sin^{-1}(x) = \sin^{-1}(2x\sqrt{1 - x^2})$ जब $|x| \leq 1/\sqrt{2}$
- $2 \cos^{-1}(x) = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$
- $2 \tan^{-1}(x) = \tan^{-1}(2x/(1 - x^2))$ जब $|x| < 1$

8. निष्कर्ष

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने और त्रिभुजों में कोणों एवं भुजाओं के बीच संबंधों को समझने में आवश्यक हैं। इनके प्रांत और परिसर सावधानीपूर्वक परिभाषित किए गए हैं ताकि वे एकैकी एवं व्युत्क्रमणीय बने रहें।