

त्रिकोणमितीय फलन और समीकरण अध्ययन नोट्स

विषय सूची

1. त्रिकोणमितीय फलन का परिचय
2. त्रिकोणमितीय अनुपात और उनकी परिभाषाएँ
3. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ
4. त्रिकोणमितीय समीकरण और उनके समाधान
5. त्रिकोणमितीय श्रेणी का योग
6. महत्वपूर्ण सूत्र और प्रमेय
7. अनुप्रयोग और व्यावहारिक समस्याएँ

1. त्रिकोणमितीय फलन का परिचय

त्रिकोणमितीय फलन गणितीय फलन हैं जो एक समकोण त्रिभुज के कोणों और भुजाओं को संबंधित करते हैं। ये फलन भौतिकी, इंजीनियरिंग और वास्तुकला जैसे विभिन्न क्षेत्रों में मौलिक हैं।

2. त्रिकोणमितीय अनुपात और उनकी परिभाषाएँ

2.1 मूल त्रिकोणमितीय अनुपात

ये एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के आधार पर परिभाषित किए गए हैं:

- साइन (sin): सम्मुख भुजा / कर्ण
- कोसाइन (cos): आसन्न भुजा / कर्ण
- टेंजेंट (tan): सम्मुख भुजा / आसन्न भुजा

2.2 व्युत्क्रम त्रिकोणमितीय अनुपात

- कोसेकेंट (csc): $1 / \sin$
- सेकेंट (sec): $1 / \cos$
- कोटेंजेंट (cot): $1 / \tan$

3. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

3.1 मूलभूत सर्वसमिकाएँ

- पाइथागोरस सर्वसमिकाएँ:

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

- $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

- भागफल सर्वसमिकाएँ:

- $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$

- $\cot\theta = \cos\theta / \sin\theta$

- सह-फलन सर्वसमिकाएँ:

- $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

- $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

4. त्रिकोणमितीय समीकरण और उनके समाधान

4.1 त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करना

त्रिकोणमितीय समीकरणों में समीकरण को संतुष्ट करने वाले कोण(ओं) का समाधान करना शामिल है। सामान्य विधियों में शामिल हैं:

- बीजगणितीय परिवर्तन
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का उपयोग
- रेखांकन विधियाँ
- प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

4.2 उदाहरण: $\sin\theta = 1/2$ को हल करना

- समाधान: $\theta = 30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ (0° से 360° के भीतर)

5. त्रिकोणमितीय श्रेणी का योग

5.1 साइन श्रेणी का योग

दी गई श्रेणी: - $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots$ के n पदों तक

सूत्र:

$$\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

5.2 कोसाइन श्रेणी का योग

दी गई श्रेणी: - $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots$ के n पदों तक

सूत्र:

$$\frac{\sin\left(\frac{n}{\beta}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

6. महत्वपूर्ण सूत्र और प्रमेय

सूत्र	विवरण
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$	साइन जोड़/घटाव
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$	कोसाइन जोड़/घटाव
$\tan(A \pm B) = (\tan A \pm \tan B) / (1 \mp \tan A \tan B)$	टेंजेंट जोड़/घटाव
$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$	द्विकोण सर्वसमिका
$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$	द्विकोण सर्वसमिका
$\tan(2A) = 2 \tan A / (1 - \tan^2 A)$	द्विकोण सर्वसमिका

7. अनुप्रयोग और व्यावहारिक समस्याएँ

7.1 वास्तविक-विश्व अनुप्रयोग

- भौतिकी: प्रक्षेप्य गति, तरंग व्यवहार की गणना।
- इंजीनियरिंग: संरचनाओं का डिजाइन, बलों का विश्लेषण।
- नेविगेशन: दूरी और दिशाओं का निर्धारण।

7.2 उदाहरण समस्या

समस्या: एक सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी हुई है जो जमीन के साथ 60° का कोण बनाती है। यदि सीढ़ी की लंबाई 10 मीटर है, तो दीवार की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

समाधान: - $\sin(60^\circ) = \text{ऊंचाई} / 10$ का उपयोग करें - $\text{ऊंचाई} = 10 * \sin(60^\circ) = 10 * (\sqrt{3}/2) = 5\sqrt{3} \approx 8.66$ मीटर

8. मुख्य अवधारणाएँ और परिभाषाएँ

9. महत्वपूर्ण सूत्रों का सारांश

सूत्र	विवरण
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	पाइथागोरस सर्वसमिका
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	पाइथागोरस सर्वसमिका
$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$	पाइथागोरस सर्वसमिका
$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	साइन योग
$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	कोसाइन योग
$\tan(A + B) = (\tan A + \tan B) / (1 - \tan A \tan B)$	टेंजेंट योग

10. निष्कर्ष

त्रिकोणमितीय फलनों और समीकरणों को समझना और लागू करना गणितीय और वास्तविक-विश्व की विस्तृत श्रृंखला की समस्याओं को हल करने के लिए आवश्यक है। इन अवधारणाओं में महारत हासिल करने से विभिन्न वैज्ञानिक और इंजीनियरिंग विषयों में उन्नत समस्या-समाधान संभव होता है।

12. अतिरिक्त नोट्स

- त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करते समय सदैव फलनों के डोमेन और रेंज की जाँच करें।
- त्रिकोणमितीय फलनों के व्यवहार को दृश्यतः समझने के लिए ग्राफ़िंग उपकरणों का उपयोग करें।
- समझ को मजबूत करने के लिए विविध प्रकार की समस्याओं का अभ्यास करें।

13. अभ्यास समस्याएँ

- अंतराल $[0^\circ, 360^\circ]$ में $\sin(\theta) = \sqrt{3}/2$ को हल करें।
- $\sin(45^\circ) + \cos(45^\circ)$ को सरल कीजिए।
- सर्वसमिका सिद्ध कीजिए: $\sin^2\theta = (1 - \cos(2\theta))/2$.

14. अंतिम विचार

त्रिकोणमिति एक शक्तिशाली उपकरण है जो कोणों और लंबाइयों को एक सुंदर और व्यावहारिक तरीके से जोड़ता है। मूलभूत सिद्धांतों में महारत हासिल करके और उन्हें वास्तविक दुनिया के परिदृश्यों में लागू करके, आप हमारे आसपास की गणितीय दुनिया की गहरी समझ प्राप्त कर सकते हैं।