अध्ययन नोट्स: Differential Equations

विषय सूची

1. अवकल समीकरणों का परिचय

एक **अवकल समीकरण** एक ऐसा समीकरण है जिसमें एक अज्ञात फलन और उसके अवकलज सम्मिलित होते हैं। ये समीकरण विभिन्न भौतिक, जैविक और इंजीनियरिंग घटनाओं के मॉडलिंग में मौलिक हैं।

2. मूल अवधारणाएँ और परिभाषाएँ

2.1 अवकल समीकरण क्या है?

एक अवकल समीकरण एक ऐसा समीकरण है जिसमें एक अज्ञात फलन और उसके अवकलज सम्मिलित होते हैं। इसका उपयोग परिवर्तन की दर से संबंधित संबंधों का वर्णन करने के लिए किया जाता है।

2.2 अवकल समीकरण की कोटि और घात

- **कोटि**: समीकरण में उपस्थित सर्वोच्च अवकलज।
- **घात**: जब समीकरण बहुपदीय रूप में हो, तो सर्वोच्च अवकलज की घात।

3. अवकल समीकरणों के प्रकार

3.1 समघात अवकल समीकरण

एक फलन $f(x, y)$ को **घात n का समघात** कहा जाता है, यदि:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

किसी अशून्य स्थिरांक λ के लिए।

3.2 रैखिक अवकल समीकरण

निम्न रूप के अवकल समीकरण को:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

रैखिक अवकल समीकरण कहा जाता है, जहाँ $P(x)$ और $Q(x)$ x के फलन (या अचर) हैं।

1. समाकलन गुणांक $I.F. = e^{\int P(x)\,dx}$ ज्ञात करें।
2. संपूर्ण समीकरण को $I.F.$ से गुणा करें।
3. हल ज्ञात करने के लिए दोनों पक्षों का समाकलन करें।

$$y \cdot I.F. = \int Q(x) \cdot I.F.\, dx + C$$

3.3 बर्नौली का अवकल समीकरण

बर्नौली का अवकल समीकरण निम्न रूप में होता है:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

इसे निम्न प्रतिस्थापन का उपयोग करके एक रैखिक अवकल समीकरण में बदला जा सकता है:

$$z = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

4. अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ

4.1 चरों का पृथक्करण

यह विधि तब उपयोग की जाती है जब समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

$$y\,dy = x\,dx \Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

4.2 समाकलन गुणांक विधि

निम्न रूप के रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने के लिए उपयोग की जाती है:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$I.F. = e^{\int P(x)\, dx}$$

4.3 यथातथ्य समीकरण

एक समीकरण यथातथ्य होता है यदि इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

निम्न शर्त के साथ:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$$

हल $\psi(x, y) = C$ द्वारा दिया जाता है।

5. अवकल समीकरणों के अनुप्रयोग

अवकल समीकरणों का व्यापक उपयोग विभिन्न क्षेत्रों में होता है:

- **भौतिकी**: गति, ऊष्मा स्थानांतरण और तरंग संचरण का मॉडलिंग।
- **इंजीनियरिंग**: विद्युत परिपथ, संरचनात्मक विश्लेषण, द्रव गतिकी।
- **जीव विज्ञान**: जनसंख्या वृद्धि, महामारी विज्ञान और जैव रासायनिक प्रक्रियाएँ।
- **अर्थशास्त्र**: आर्थिक वृद्धि और बाजार गतिकी का मॉडलिंग।

$$\frac{dP}{dt} = kP \Rightarrow P(t) = P_0 e^{kt}$$

6. सारांश और समीक्षा

अवधारणा	परिभाषा	उदाहरण
अवकल समीकरण	एक समीकरण जिसमें एक अज्ञात फलन और उसके अवकलज सम्मिलित होते हैं	$\frac{dy}{dx} = x$
कोटि	समीकरण में उपस्थित सर्वोच्च अवकलज	$\frac{d^2y}{dx^2}$
घात	बहुपदीय रूप में सर्वोच्च अवकलज की घात	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
रैखिक समीकरण	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ रूप का समीकरण	$\frac{dy}{dx} + 2y = x$
समघात समीकरण	एक समीकरण जहाँ $f(x, y)$ और $g(x, y)$ समघात फलन होते हैं	$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$
बर्नौली समीकरण	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ रूप का समीकरण	$\frac{dy}{dx} + y = xy^2$

7. मुख्य सूत्र और समीकरण

- **प्रथम-कोटि के रैखिक अवकल समीकरण का सामान्य रूप**:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- **समाकलन गुणांक**:

$$I.F. = e^{\int P(x)\,dx}$$

- **रैखिक अवकल समीकरण का हल**:

$$y \cdot I.F. = \int Q(x) \cdot I.F.\, dx + C$$

- **समघात अवकल समीकरण**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad \text{जहाँ } f \text{ और } g \text{ समघात फलन हैं}$$

- **बर्नौली समीकरण का रूपांतरण**:

$$z = y^{1-n}, \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

8. निष्कर्ष

अवकल समीकरण वास्तविक विश्व की घटनाओं के मॉडलिंग के लिए शक्तिशाली उपकरण हैं। अवकल समीकरणों के प्रकारों और उन्हें हल करने की विधियों को समझना उच्च गणित और उसके अनुप्रयोगों के लिए आवश्यक है।

10. अभ्यास समस्याएँ

- $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ को हल करें
- $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ के लिए समाकलन गुणांक ज्ञात करें
- बर्नौली समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = xy^2$ को हल करें

11. समीक्षा सूची

- [ ] अवकल समीकरण की परिभाषा समझें
- [ ] अवकल समीकरण की कोटि और घात की पहचान करना जानें
- [ ] रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने में सक्षम हों
- [ ] समघात और बर्नौली समीकरणों को समझें
- [ ] चरों के पृथक्करण और समाकलन गुणांक जैसी विधियों को लागू करें

12. अतिरिक्त संसाधन

- पाठ्यपुस्तक: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* by William E. Boyce and Richard C. DiPrima
- ऑनलाइन संसाधन: Khan Academy, MIT OpenCourseWare, Paul's Online Math Notes

13. अंतिम नोट्स

अवकल समीकरण गणितीय मॉडलिंग की आधारशिला हैं। इन अवधारणाओं में महारत हासिल करने से विज्ञान, इंजीनियरिंग और अन्य क्षेत्रों में अनुप्रयोगों के व्यापक द्वार खुलते हैं। इन विधियों की निरंतर अभ्यास और समझ इस गणित के आवश्यक क्षेत्र में प्रवीणता की ओर ले जाएगी।