

अध्ययन नोट्स: वक्रों द्वारा घिरा क्षेत्र

विषय सूची

1. वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्र का परिचय
2. मुख्य अवधारणाएँ और परिभाषाएँ
3. दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल
4. एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल
5. उदाहरण और अनुप्रयोग
6. सारांश और मुख्य बिंदु

1. वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्र का परिचय

वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्र को ज्ञात करने की अवधारणा कैलकुलस में मौलिक है। इसमें वक्रों द्वारा घिरे कुल क्षेत्र को निर्धारित करने के लिए एक निर्दिष्ट अंतराल पर दो फ़ंक्शनों के अंतर का समाकलन शामिल होता है।

2. मुख्य अवधारणाएँ और परिभाषाएँ

- **क्षेत्रफल के रूप में समाकलन:** a से b तक एक फ़ंक्शन का निश्चित समाकलन उन सीमाओं के बीच वक्र के नीचे का शुद्ध क्षेत्रफल देता है।
- **शुद्ध क्षेत्रफल बनाम कुल क्षेत्रफल:** समाकलन एक शुद्ध क्षेत्रफल (धनात्मक और ऋणात्मक) दे सकता है, जबकि कुल क्षेत्रफल क्षेत्र के निरपेक्ष मान को ध्यान में रखता है।

3. दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

3.1 सामान्य स्थिति

$$\text{Area} = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$$

- **शर्त:** यदि $g(x) \geq f(x)$ अंतराल $[a, b]$ पर हो, तो सूत्र सरल हो जाता है:

$$\text{Area} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$$

3.2 जब वक्र प्रतिच्छेद करते हैं

यदि वक्र अंतराल $[a, b]$ के भीतर किसी बिंदु c पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो कुल क्षेत्रफल को खंडों में गणना की जाती है:

$$\text{Area} = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

- **उदाहरण:** मान लें कि $f(x) \geq g(x)$ अंतराल $[a, c]$ पर और $g(x) \geq f(x)$ अंतराल $[c, b]$ पर हो। कुल क्षेत्रफल दोनों समाकलों का योग होता है।

4. एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल

4.1 एकल वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल

a से b तक एकल वक्र $y = f(x)$ के अंतर्गत क्षेत्रफल है:

$$\text{Area} = \int_a^b f(x) dx$$

- **महत्वपूर्ण नोट:** यदि वक्र x -अक्ष से नीचे चला जाता है, तो समाकलन **शुद्ध क्षेत्रफल** देता है, जिसमें ऋणात्मक मान शामिल हो सकते हैं। **कुल क्षेत्रफल** ज्ञात करने के लिए, समाकलन के निरपेक्ष मान को लें।

4.2 एक वक्र और x -अक्ष के बीच का क्षेत्रफल

किसी अंतराल पर एक वक्र और x -अक्ष के बीच के कुल क्षेत्रफल की गणना करने के लिए, फ़ंक्शन के निरपेक्ष मान का समाकलन करें:

$$\text{Total Area} = \int_a^b |f(x)| dx$$

5. उदाहरण और अनुप्रयोग

उदाहरण 1: दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

वक्र $y = x^2$ और $y = x$ पर विचार करें।

- **प्रतिच्छेदन बिंदु:** $x^2 = x$ को हल करें $\rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0, 1$
- **क्षेत्रफल गणना:**

$$\text{Area} = \int_0^1 [x - x^2] dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

उदाहरण 2: एक वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल

0 से π तक वक्र $y = \sin(x)$ के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करें।

- **क्षेत्रफल गणना:**

$$\text{Area} = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2$$

6. सारांश और मुख्य बिंदु

अवधारणा	विवरण
शुद्ध क्षेत्रफल	एक फंक्शन का एक अंतराल पर समाकलन; धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है
कुल क्षेत्रफल	समाकलन का निरपेक्ष मान; सभी क्षेत्रों को ध्यान में रखता है
वक्रों के बीच का क्षेत्रफल	ऊपरी और निचले फंक्शन के अंतर का एक अंतराल पर समाकलन
प्रतिच्छेदन बिंदु	जब वक्र प्रतिच्छेद करते हैं तो क्षेत्र को खंडों में विभाजित करने के लिए महत्वपूर्ण
निरपेक्ष मान समाकलन	x-अक्ष को पार करने वाले वक्र के लिए कुल क्षेत्रफल की गणना में प्रयुक्त

7. तालिकाएँ और तुलनाएँ

तुलना: शुद्ध क्षेत्रफल बनाम कुल क्षेत्रफल

अवधारणा	परिभाषा	सूत्र	टिप्पणियाँ
शुद्ध क्षेत्रफल	चिह्न सहित क्षेत्रफल (धनात्मक या ऋणात्मक)	$\int_a^b f(x) dx$	ऋणात्मक हो सकता है
कुल क्षेत्रफल	क्षेत्रफल का निरपेक्ष मान	$\int_a^b f(x) dx$	सदैव धनात्मक

8. मूल चित्र और कैप्शन

चित्र 1: दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल

कैप्शन: दो वक्रों $y = f(x)$ और $y = g(x)$ के बीच घिरे क्षेत्र को दर्शाने वाला आरेख।

संदर्भ: मूल सामग्री में "दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल" अनुभाग के अंतर्गत स्थित।

9. महत्वपूर्ण सूत्र

- दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल:

$$\text{Area} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \quad \text{यदि } g(x) \geq f(x)$$

- एक वक्र के अंतर्गत कुल क्षेत्रफल:

$$\text{Total Area} = \int_a^b |f(x)| dx$$

- जब वक्र प्रतिच्छेद करते हैं तो क्षेत्रफल:

$$\text{Area} = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

10. निष्कर्ष

वक्रों द्वारा घिरे क्षेत्र की गणना करने की समझ गणित, भौतिकी और इंजीनियरिंग में विभिन्न अनुप्रयोगों के लिए आवश्यक है। समाकलन तकनीकों में निपुण होकर और परिणामों की सही व्याख्या करके, आप फ़ंक्शन द्वारा घिरे क्षेत्रों से संबंधित समस्याओं का प्रभावी ढंग से विश्लेषण और समाधान कर सकते हैं।

