निश्चित समाकलन का अध्ययन नोट्स

विषय सूची

1. निश्चित समाकलन का परिचय

निश्चित समाकलन का उपयोग दो बिंदुओं के बीच किसी वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल की गणना के लिए किया जाता है। ये कैलकुलस में एक मौलिक अवधारणा हैं और भौतिकी, इंजीनियरिंग तथा गणित में इनके व्यापक अनुप्रयोग हैं।

2. मुख्य अवधारणाएँ और परिभाषाएँ

2.1 निश्चित समाकलन की परिभाषा

एक फलन $f(x)$ का a से b तक निश्चित समाकलन निम्न प्रकार दर्शाया जाता है:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

यह $x = a$ से $x = b$ तक वक्र $f(x)$ और x-अक्ष के बीच के हस्ताक्षरित क्षेत्रफल को दर्शाता है।

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a + rh)$$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$.

3. लाइबनिट्ज प्रमेय

3.1 कथन

यदि $\phi(x)$ और $\psi(x)$, $[\alpha, \beta]$ पर परिभाषित फलन हैं और $[\alpha, \beta]$ पर अवकलनीय हैं, तथा $f(t)$ $[\psi(\alpha), \phi(\beta)]$ पर सतत है, तो:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt\right) = f(\psi(x))\cdot\psi^{'}(x) - f(\phi(x))\cdot\phi^{'}(x)$$

4. वाली का सूत्र

4.1 अवलोकन

वाली का सूत्र एक विशेष प्रकार का समाकलन सूत्र है जिसका उपयोग निम्न प्रकार के समाकलनों का मूल्यांकन करने के लिए किया जाता है:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx \quad \text{या} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

इसका उपयोग साइन और कोसाइन फलनों के गुणनफलों वाले समाकलनों में भी किया जाता है।

5. निश्चित समाकलन में असमानताएँ

5.1 मौलिक असमानता

यदि $f(x) \geq g(x)$ सभी $x \in [\alpha, \beta]$ के लिए हो, तो:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$$

यह असमानता निश्चित समाकलनों की सीमाओं का अनुमान लगाने में उपयोगी है।

6. योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन

6.1 परिभाषा

मान लीजिए $f(x)$ बंद अंतराल $[a, b]$ पर एक सतत फलन है। तब निश्चित समाकलन को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(a + r \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right)$$

इसे रीमैन योग दृष्टिकोण के रूप में भी जाना जाता है।

7. कुछ विशेष स्थितियाँ

7.1 स्थिति 1: योग से समाकलन

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

ये योगों के समाकलनों में परिवर्तित होने के मानक उदाहरण हैं।

7.2 स्थिति 2: सामान्यीकृत योग

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

यह संख्यात्मक समाकलन में उपयोग किया जाने वाला एक सामान्य रूप है।

8. सारांश

विषय	मुख्य बिंदु
निश्चित समाकलन	वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल, $\int_a^b f(x)\,dx$ के रूप में परिभाषित
लाइबनिट्ज प्रमेय	परिवर्तनीय सीमाओं वाले समाकलन का अवकलज
वाली का सूत्र	0 से $\frac{\pi}{2}$ तक विशेष समाकलन
असमानताएँ	यदि $f(x) \geq g(x)$, तो $\int f(x)\,dx \geq \int g(x)\,dx$
योग की सीमा	समाकलन के लिए रीमैन योग दृष्टिकोण
विशेष स्थितियाँ	वे योग जो निश्चित समाकलनों में परिवर्तित होते हैं

9. निष्कर्ष

निश्चित समाकलन कैलकुलस में एक शक्तिशाली उपकरण हैं, जो क्षेत्रफलों, आयतनों और अन्य मात्राओं की गणना करने का एक तरीका प्रदान करते हैं। लाइबनिट्ज प्रमेय, वाली के सूत्र और योगों व समाकलनों के बीच संबंध की अवधारणाओं को समझना इस विषय में महारत हासिल करने के लिए महत्वपूर्ण है।

10. अंतिम टिप्पणियाँ

- प्रमेयों को लागू करते समय फलनों की सातत्यता और अवकलनीयता की हमेशा जाँच करें।
- वक्र के अंतर्गत क्षेत्रफल का दृश्यीकरण करने के लिए आलेखीय विधियों का उपयोग करें।
- विधियों में प्रवीणता प्राप्त करने के लिए विभिन्न प्रकार के फलनों के साथ अभ्यास करें।