अध्ययन नोट्स: अनिश्चित समाकलन और समाकलन की विधियाँ

विषय सूची

1. **अनिश्चित समाकलन का परिचय**
2. **मुख्य अवधारणाएँ और परिभाषाएँ**
3. **मानक समाकलन सूत्र**
4. **समाकलन की विधियाँ**
5. 4.1 प्रतिस्थापन विधि
6. 4.2 खंडशः समाकलन
7. **विशेष समाकलन सूत्र**
8. **सारांश और समीक्षा**

1. अनिश्चित समाकलन का परिचय

एक **अनिश्चित समाकलन** अवकलन की विपरीत प्रक्रिया है। यह फलनों के एक समूह को दर्शाता है जिसका अवकलज दिए गए फलन के बराबर होता है, जिसमें समाकलन का एक स्थिरांक C जोड़ा जाता है।

2. मुख्य अवधारणाएँ और परिभाषाएँ

- **प्रतिअवकलज** (Antiderivative): एक फलन जिसका अवकलन करने पर मूल फलन प्राप्त होता है।
- **समाकलन का स्थिरांक**: एक स्वेच्छ स्थिरांक C जो किसी फलन के अनंत प्रतिअवकलजों के लिए खाता है।
- **अनिश्चित समाकलन**: प्रतिअवकलज प्रक्रिया का परिणाम, जिसमें स्थिरांक C शामिल होता है।

3. मानक समाकलन सूत्र

सूत्र	विवरण	उदाहरण
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	एकीकरण के लिए घात नियम	$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} +$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	घातीय फलन	$\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	लघुगणकीय समाकलन	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x$
$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन	पाठ में दर्शाए अनुस
$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$	त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन	पाठ में दर्शाए अनुस
$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\right\rvert + C$	त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन	पाठ में दर्शाए अनुस

4. समाकलन की विधियाँ

4.1 प्रतिस्थापन विधि

प्रतिस्थापन विधि का उपयोग समाकलन के चर को बदलकर समाकलन को सरल बनाने के लिए किया जाता है। यह विशेष रूप से $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$ के रूप के समाकलनों के लिए उपयोगी है।

चरण: 1. मान लीजिए $u = g(x)$, तो $du = g'(x)\,dx$। 2. समाकलन में u और du का प्रतिस्थापन करें। 3. u के सापेक्ष समाकलन करें। 4. मूल चर में वापस प्रतिस्थापित करें।

उदाहरण:

$$\int x\cos(x^2)\,dx$$

मान लीजिए $u = x^2$, तो $du = 2x\,dx$, इसलिए $x\,dx = \frac{1}{2}du$।

$$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

4.2 खंडशः समाकलन

खंडशः समाकलन का उपयोग दो फलनों के गुणनफल को समाकलित करने के लिए किया जाता है। यह अवकलन के गुणनफल नियम से प्राप्त होता है।

सूत्र:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

चरण: 1. समाकल्य से u और dv चुनें। 2. u का अवकलन करके du प्राप्त करें। 3. dv का समाकलन करके v प्राप्त करें। 4. सूत्र में प्रतिस्थापित करें और सरल करें।

उदाहरण:

$$\int x \ln x\,dx$$

मान लीजिए $u = \ln x$, $dv = x\,dx$, तो $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^2}{2}$।

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

5. विशेष समाकलन सूत्र

सूत्र	विवरण	उदाहरण
$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$	गुणांक के साथ घातीय फलन	$\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$
$\int a^{bx}\,dx = \frac{a^{bx}}{b\ln a} + C$	आधार a वाला घातीय फलन	$\int 2^{3x}\,dx = \frac{2^{3.}}{3\ln}$
$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln\mid ax+b\mid + C$	परिमेय फलन	$\int \frac{1}{2x+3}\,dx =$
$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन	पाठ में दर्शाए अनुस
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन	पाठ में दर्शाए अनुस
$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$	त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन	पाठ में दर्शाए अनुस

6. सारांश और समीक्षा

- **अनिश्चित समाकलन** अवकलन के विपरीत होते हैं और इनमें समाकलन का एक स्थिरांक शामिल होता है।
- **मानक सूत्र** सामान्य फलनों के त्वरित समाकलन के लिए आवश्यक हैं।

- **प्रतिस्थापन** और **खंडशः समाकलन** अधिक जटिल समाकलनों को हल करने के लिए दो शक्तिशाली तकनीकें हैं।
- वर्गमूल वाले द्विघात व्यंजकों के समाकलन के लिए **त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन** का उपयोग किया जाता है।
- मूल समाकल्य से मेल खाता है यह सुनिश्चित करने के लिए सदैव परिणाम का अवकलन करके अपने कार्य की जाँच करें।

अंतिम नोट्स

- एकीकरण तकनीकों में महारत हासिल करने के लिए अभ्यास आवश्यक है।
- सदैव अपने उत्तरों को अवकलन द्वारा सत्यापित करें।
- प्रतिस्थापन और खंडशः समाकलन का उपयोग समाकल्य के आधार पर रणनीतिक रूप से करें।