

अध्ययन नोट्स: एक फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ

विषयसूची

1. उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ का परिचय
2. प्रमुख अवधारणाएँ और परिभाषाएँ
3. क्रांतिक बिंदु और स्थिर बिंदु
4. प्रथम अवकलज परीक्षण
5. द्वितीय अवकलज परीक्षण
6. उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ पर महत्वपूर्ण परिणाम
7. उदाहरण और अनुप्रयोग
8. सारांश और प्रमुख निष्कर्ष

उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ का परिचय

उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ एक फलन के **चरम मान** होते हैं, जो किसी दिए गए अंतराल में **सर्वोच्च और निम्नतम** बिंदुओं को दर्शाते हैं। ये गणित और वास्तविक दुनिया के अनुप्रयोगों में **अनुकूलन समस्याओं** में आवश्यक होते हैं।

प्रमुख अवधारणाएँ और परिभाषाएँ

◆ स्थानीय बनाम वैश्विक चरम

- **स्थानीय उच्चिष्ठ**: एक बिंदु जहाँ फलन वर्धमान से हासमान में परिवर्तित होता है।
- **स्थानीय निम्निष्ठ**: एक बिंदु जहाँ फलन हासमान से वर्धमान में परिवर्तित होता है।
- **वैश्विक उच्चिष्ठ**: फलन के संपूर्ण डोमेन पर सर्वोच्च मान।
- **वैश्विक निम्निष्ठ**: फलन के संपूर्ण डोमेन पर निम्नतम मान।

क्रांतिक बिंदु और स्थिर बिंदु

◆ परिभाषा

- **क्रांतिक बिंदु**: फलन के डोमेन में एक बिंदु जहाँ **प्रथम अवकलज शून्य या अपरिभाषित** होता है।
- **स्थिर बिंदु**: एक क्रांतिक बिंदु जहाँ **प्रथम अवकलज शून्य** होता है।

✦ प्रथम अवकलज परीक्षण

◆ प्रक्रिया

1. फलन के सभी **क्रांतिक बिंदु** ज्ञात करें।
2. प्रत्येक क्रांतिक बिंदु के आसपास **प्रथम अवकलज का चिह्न** परखें।
3. यदि अवकलज **धनात्मक से ऋणात्मक** में परिवर्तित होता है, तो बिंदु **स्थानीय उच्चिष्ठ** है।
4. यदि अवकलज **ऋणात्मक से धनात्मक** में परिवर्तित होता है, तो बिंदु **स्थानीय निम्निष्ठ** है।
5. यदि अवकलज का चिह्न **परिवर्तित नहीं होता**, तो बिंदु न तो उच्चिष्ठ है और न ही निम्निष्ठ।

✦ द्वितीय अवकलज परीक्षण

◆ प्रक्रिया

1. **प्रथम अवकलज और क्रांतिक बिंदु** ज्ञात करें।
2. **द्वितीय अवकलज** की गणना करें।
3. प्रत्येक क्रांतिक बिंदु पर द्वितीय अवकलज का मूल्यांकन करें:
4. यदि $f''(x) > 0$, तो बिंदु **स्थानीय निम्निष्ठ** है।
5. यदि $f''(x) < 0$, तो बिंदु **स्थानीय उच्चिष्ठ** है।
6. यदि $f''(x) = 0$, तो परीक्षण **निर्णायक नहीं** है।

✦ उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ पर महत्वपूर्ण परिणाम

परिणाम	विवरण
(i)	उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ एकांतर क्रम में होते हैं। दो उच्चिष्ठों के बीच एक निम्निष्ठ होता है, और इसका विपरीत भी सत्य है।
(ii)	यदि $f(x) \rightarrow \infty$ जब $x \rightarrow a$ या $x \rightarrow b$, और $f'(x) = 0$ केवल एक मान $c \in (a, b)$ के लिए होता है, तो $f(c)$ निम्नतम मान होता है।
(iii)	यदि $f(x) \rightarrow -\infty$ जब $x \rightarrow a$ या $x \rightarrow b$, तो $f(c)$ अधिकतम मान होता है।
(iv)	स्थिर बिंदु वे बिंदु हैं जहाँ $f'(x) = 0$ होता है, अर्थात् प्रथम अवकलज शून्य होता है।

✦ उदाहरण और अनुप्रयोग

◆ उदाहरण 1: स्थानीय चरम

दिया गया: $f(x) = x^3 - 3x$

1. $f'(x) = 3x^2 - 3$ की गणना करें
2. $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ को हल करें
3. द्वितीय अवकलज परीक्षण का उपयोग करें:
4. $f''(x) = 6x$
5. $x = 1$ पर: $f''(1) = 6 > 0 \rightarrow$ स्थानीय निम्निष्ठ
6. $x = -1$ पर: $f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ स्थानीय उच्चिष्ठ

✦ सारांश और प्रमुख निष्कर्ष

✓ सारांश

- उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ एक फलन के **चरम मान** होते हैं।
- क्रांतिक बिंदु वे बिंदु हैं जहाँ **प्रथम अवकलज शून्य या अपरिभाषित** होता है।
- **प्रथम अवकलज परीक्षण** क्रांतिक बिंदुओं की प्रकृति निर्धारित करने में सहायक होता है।
- **द्वितीय अवकलज परीक्षण** पुष्टि कर सकता है कि कोई क्रांतिक बिंदु उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ।
- महत्वपूर्ण परिणामों में उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ का **एकांतर प्रकृति**, तथा अनंत पर फलन का व्यवहार शामिल है।

📝 प्रमुख निष्कर्ष

- चरम मान ढूँढ़ते समय हमेशा **क्रांतिक बिंदुओं** की जाँच करें।
- **प्रथम अवकलज परीक्षण** का उपयोग तब करें जब **द्वितीय अवकलज शून्य** होने पर निर्णायक परिणाम प्राप्त करना हो।
- वैश्विक चरम के लिए किसी अंतराल के **अंत्य बिंदुओं** पर व्यवहार समझें।
- अवधारणाओं की समझ को मजबूत करने के लिए **उदाहरणों** के साथ अभ्यास करें।