

अध्ययन नोट्स: अवकलजों का अनुप्रयोग

विषय सूची

1. अवकलजों का परिचय
2. महत्वपूर्ण प्रमेय
3. रोले का प्रमेय
4. लाग्रान्ज का माध्य मान प्रमेय
5. अवकलजों के अनुप्रयोग
6. प्रमुख अवधारणाओं का सारांश
7. महत्वपूर्ण सूत्र
8. दृश्य सहायक सामग्री और चित्र
9. निष्कर्ष

1. अवकलजों का परिचय

अवकलज कैलकुलस में मूलभूत हैं और किसी फलन के किसी विशिष्ट बिंदु पर परिवर्तन की दर निर्धारित करने के लिए उपयोग किए जाते हैं। ये भौतिक विज्ञान, इंजीनियरिंग और अर्थशास्त्र जैसे विभिन्न क्षेत्रों में अत्यावश्यक हैं।

2. महत्वपूर्ण प्रमेय

2.1 रोले का प्रमेय

रोले के प्रमेय की शर्तें

- फलन $f(x)$ बंद अंतराल $[a, b]$ पर सतत हो।
- फलन $f(x)$ खुले अंतराल (a, b) पर अवकलनीय हो।
- $f(a) = f(b)$ हो।

उदाहरण

माना $f(x) = x^2 - 4x + 3$ अंतराल $[1, 3]$ पर।

$$- f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$- f(3) = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$- f'(x) = 2x - 4$$

$$- f'(x) = 0 \text{ रखने पर: } 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

अतः, $f'(2) = 0$, जो रोले के प्रमेय को संतुष्ट करता है।

2.2 लाग्रांज का माध्य मान प्रमेय

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

यह प्रमेय रोले के प्रमेय का सामान्यीकरण है, जहाँ $f(a) \neq f(b)$ होता है।

लाग्रांज प्रमेय की शर्तें

- फलन $f(x)$ बंद अंतराल $[a, b]$ पर सतत हो।
- फलन $f(x)$ खुले अंतराल (a, b) पर अवकलनीय हो।

उदाहरण

माना $f(x) = x^2$ अंतराल $[1, 4]$ पर।

- $f(1) = 1$

- $f(4) = 16$

- $f'(x) = 2x$

- औसत परिवर्तन दर: $\frac{16 - 1}{4 - 1} = 5$

- c ऐसा ज्ञात करें कि $f'(c) = 5$: $2c = 5 \Rightarrow c = 2.5$

अतः, $f'(2.5) = 5$, जो माध्य मान प्रमेय को संतुष्ट करता है।

3. अवकलजों के अनुप्रयोग

3.1 महत्तम और न्यूनतम मान ज्ञात करना

अवकलजों का उपयोग फलन के क्रांतिक बिंदु ज्ञात करने के लिए किया जाता है, जो स्थानीय अधिकतम और न्यूनतम मान निर्धारित करने में सहायक होते हैं। यह अनुकूलन समस्याओं में महत्वपूर्ण है।

चरण:

1. $f'(x)$ ज्ञात करें।
2. क्रांतिक बिंदु ज्ञात करने के लिए $f'(x) = 0$ सेट करें।
3. क्रांतिक बिंदुओं को वर्गीकृत करने के लिए द्वितीय अवकलज परीक्षण या चिह्न तालिका का उपयोग करें।

3.2 वर्धमान और हासमान फलन

- कोई फलन एक अंतराल पर वर्धमान होता है यदि उस अंतराल में सभी x के लिए $f'(x) > 0$ हो।
- कोई फलन एक अंतराल पर हासमान होता है यदि उस अंतराल में सभी x के लिए $f'(x) < 0$ हो।

उदाहरण

$f(x) = x^3 - 3x$ के लिए,

- $f'(x) = 3x^2 - 3$

- $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

- अंतरालों का परीक्षण: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$

- $f(x)$, $(-1, 1)$ पर हासमान है और $(-\infty, -1)$ तथा $(1, \infty)$ पर वर्धमान है।

3.3 उन्नतोदरता और नति परिवर्तन बिंदु

- कोई फलन उन्नतोदर (concave up) है यदि $f''(x) > 0$ हो।
- कोई फलन अवतल (concave down) है यदि $f''(x) < 0$ हो।
- नति परिवर्तन बिंदु वे बिंदु होते हैं जहाँ $f''(x) = 0$ हो और उन्नतोदरता में परिवर्तन हो।

4. प्रमुख अवधारणाओं का सारांश

अवधारणा	परिभाषा	मुख्य बिंदु
अवकलज	एक फलन के किसी बिंदु पर परिवर्तन की दर	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
रोले का प्रमेय	MVT का विशेष मामला जहाँ $f(a) = f(b)$	क्रांतिक बिंदु के अस्तित्व को सुनिश्चित करता है
माध्य मान प्रमेय	रोले के प्रमेय का सामान्यीकृत संस्करण	औसत परिवर्तन दर को अवकलज के बराबर सुनिश्चित करता है
क्रांतिक बिंदु	वे बिंदु जहाँ $f'(x) = 0$ या $f'(x)$ अपरिभाषित हो	अनुकूलन और चरम मान विश्लेषण में उपयोगी
उन्नतोदरता	फलन की प्रवणता का व्यवहार	द्वितीय अवकलज द्वारा निर्धारित
नति परिवर्तन बिंदु	वह बिंदु जहाँ उन्नतोदरता बदलती है	$f''(x) = 0$ को हल करके और चिह्न परीक्षण द्वारा पाया जाता है

5. महत्वपूर्ण सूत्र

सूत्र	विवरण
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	एक फलन का एक बिंदु x पर अवकलज
$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$	माध्य मान प्रमेय: औसत परिवर्तन दर किसी बिंदु c पर अवकलज के बराबर होती है
$f''(x) > 0$	फलन बिंदु x पर उन्नतोदर (concave up) है
$f''(x) < 0$	फलन बिंदु x पर अवतल (concave down) है

6. दृश्य सहायक सामग्री और चित्र

6.1 क्रांतिक बिंदुओं वाले फलन का ग्राफ

- चित्र संदर्भ: [Image: Function with Critical Points.png](#)
- कैप्शन: यह ग्राफ एक फलन के स्थानीय अधिकतम और न्यूनतम बिंदुओं को दिखाता है, और यह प्रदर्शित करता है कि कैसे अवकलज के माध्यम से क्रांतिक बिंदुओं की पहचान की जाती है।

6.2 उन्नतोदरता वाले फलन का ग्राफ

- चित्र संदर्भ: [Image: Concavity of a Function.png](#)
- कैप्शन: यह ग्राफ एक फलन की उन्नतोदरता को प्रदर्शित करता है, दिखाता है कि वह कहाँ उन्नतोदर (concave up) और कहाँ अवतल (concave down) है।

7. निष्कर्ष

फलनों के व्यवहार को समझने और अनुकूलन समस्याओं को हल करने में अवकलज अत्यावश्यक हैं। रोले का प्रमेय और माध्य मान प्रमेय जैसे प्रमेय फलनों के विश्लेषण और उनके गुणों के अध्ययन की नींव प्रदान करते हैं। इन अवधारणाओं को लागू करके, हम क्रांतिक बिंदुओं, उन्नतोदरता और नति परिवर्तन बिंदुओं का निर्धारण कर सकते हैं, जो सैद्धांतिक और व्यावहारिक दोनों प्रकार की गणित में महत्वपूर्ण हैं।