

अध्ययन नोट्स: सीमाएँ, सातत्य और अवकलनीयता

विषय सूची

1. सीमाओं का परिचय
2. अनिर्धारित रूप
3. किसी बिंदु पर सातत्य
4. अवकलनीयता
5. सारांश और संक्षेप

1. सीमाओं का परिचय

सीमा की परिभाषा

एक सीमा वह मान है जिसकी ओर कोई फलन तब अग्रसर होता है जब निवेश किसी विशिष्ट मान की ओर अग्रसर होता है।

सीमा कैसे ज्ञात करें

- **प्रत्यक्ष प्रतिस्थापन:** यदि $f(a)$ परिभाषित और सतत है, तब $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ।
- **अनिर्धारित रूप:** जब प्रत्यक्ष प्रतिस्थापन से $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , ∞^0 , या 0^0 जैसे व्यंजक प्राप्त होते हैं, तब अतिरिक्त विधियों की आवश्यकता होती है।
- **बीजीय संशोधन:** अनिर्धारित रूपों को हटाने के लिए व्यंजक को सरल बनाएँ।
- **परिमेयकरण:** वर्गमूल वाले व्यंजकों के लिए उपयोगी।
- **गुणनखंडन:** उभयनिष्ठ पदों को निरस्त करने के लिए व्यंजकों के गुणनखंड करें।
- **लॉपीटल नियम:** $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ प्रकार के अनिर्धारित रूपों के लिए।

2. अनिर्धारित रूप

अनिर्धारित रूपों के प्रकार

रूप	विवरण
$\frac{0}{0}$	शून्य को शून्य से विभाजित
$\frac{\infty}{\infty}$	अनंत को अनंत से विभाजित
$0 \cdot \infty$	शून्य को अनंत से गुणित
1^∞	अनंत की घात वाला एक
∞^0	शून्य की घात वाला अनंत
0^0	शून्य की घात वाला शून्य

अनिर्धारित रूपों का समाधान

- बीजीय संशोधन: व्यंजकों को सरल बनाएँ।
- लॉपीटल नियम: $\frac{0}{0}$ या $\frac{\infty}{\infty}$ के लिए, अंश और हर को अवकलित करें।
- श्रेणी प्रसार: टेलर या मैकलॉरिन श्रेणी में फलनों का प्रसार करें।
- प्रतिस्थापन: जटिल व्यंजकों को सरल बनाने के लिए प्रतिस्थापन का उपयोग करें।

3. किसी बिंदु पर सातत्य

सातत्य की परिभाषा

SATHEE

एक फलन $f(x)$ बिंदु $x = a$ पर सतत है यदि निम्नलिखित तीन शर्तें सन्तुष्ट होती हैं: 1. $f(a)$ परिभाषित है। 2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ का अस्तित्व है। 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

सामान्य फलनों की सातत्यता

फलन	सभी बिंदुओं पर सातत्यता
बहुपद	✓ हाँ
परिमेय	✓ हाँ (सिवाय जहाँ हर शून्य हो)
त्रिकोणमितीय	✓ हाँ
घातांकीय	✓ हाँ
लघुगणकीय	✓ हाँ (सिवाय $x = 0$ पर)

असातत्यताएँ

- **निवारणीय असातत्यता:** ग्राफ में एक छिद्र जहाँ सीमा का अस्तित्व हो लेकिन फलन अपरिभाषित हो।
- **अनंत असातत्यता:** एक ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी जहाँ फलन अनंत की ओर प्रवृत्त होता है।
- **कूद असातत्यता:** वामहस्त और दक्षिणहस्त सीमाएँ अस्तित्व में हों लेकिन समान न हों।

4. अवकलनीयता

अवकलनीयता की परिभाषा

एक फलन $f(x)$ बिंदु $x = a$ पर अवकलनीय है यदि उस बिंदु पर अवकलज का अस्तित्व है। इसके लिए फलन को उस बिंदु पर सतत होना आवश्यक है और वामहस्त एवं दक्षिणहस्त अवकलज समान होने चाहिए।

वामहस्त और दक्षिणहस्त अवकलज

- **दक्षिणहस्त अवकलज:**

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- **वामहस्त अवकलज:**

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

अवकलनीयता के लिए शर्तें

$x = a$ पर अवकलनीय होने के लिए निम्नलिखित सत्य होना चाहिए: - फलन को $x = a$ पर सतत होना चाहिए। - वामहस्त अवकलज $f'(a^-)$, दक्षिणहस्त अवकलज $f'(a^+)$ के समान होना चाहिए। - अवकलज परिमित होना चाहिए।

5. सारांश और संक्षेप

मुख्य अवधारणाओं का सारांश

अवधारणा	विवरण
सीमा	वह मान जिसकी ओर कोई फलन तब अग्रसर होता है जब निवेश किसी विशिष्ट मान की ओर अग्रसर होता है
अनिर्धारित रूप	वे रूप जिन्हें हल करने के लिए विशेष विधियों की आवश्यकता होती है (जैसे $\frac{0}{0}$)
सातत्य	एक फलन सतत होता है यदि सीमा का अस्तित्व है और वह फलन के मान के बराबर है
अवकलनीयता	एक फलन अवकलनीय होता है यदि वाम और दक्षिण अवकलज समान हों

अवकलनीयता का सारांश

- कोई फलन किसी बिंदु पर अवकलनीय होता है यदि वामहस्त और दक्षिणहस्त अवकलज समान और परिमित हों।
- अवकलनीयता से सातत्य का निष्कर्ष निकलता है, लेकिन सातत्य से अवकलनीयता का निष्कर्ष नहीं निकलता।
- बहुपद और घातांकीय जैसे सामान्य फलन सामान्यतः अवकलनीय होते हैं।

6. महत्वपूर्ण सूत्र और परिभाषाएँ

सीमा की परिभाषा

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ का अर्थ है कि $f(x)$, $x \rightarrow a$ होने पर L की ओर अग्रसर होता है

अवकलज की परिभाषा

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

वाम और दक्षिण अवकलज

- दक्षिण अवकलज:

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- वाम अवकलज:

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

लॉपीटल नियम

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{के लिए } \frac{0}{0} \text{ या } \frac{\infty}{\infty})$$

7. उदाहरण और अनुप्रयोग

उदाहरण 1: प्रत्यक्ष प्रतिस्थापन द्वारा सीमा

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 3(2) + 1 = 7$$

उदाहरण 2: एक अनिर्धारित रूप का समाधान

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

उदाहरण 3: सातत्यता जाँच

माना $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

- सरलीकरण: $f(x) = x + 2$ (जब $x \neq 2$)

- $f(2)$ अपरिभाषित है, इसलिए फलन में $x = 2$ पर निवारणीय असातत्यता है।

उदाहरण 4: अवकलनीयता जाँच

माना $f(x) = |x|$

- $f'(x) = -1$ जब $x < 0$

- $f'(x) = 1$ जब $x > 0$

- $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, इसलिए $f(x)$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

8. निष्कर्ष

- सीमाएँ कैलकुलस की नींव हैं और फलनों के व्यवहार को समझने में सहायक होती हैं।
- सातत्य अवकलनीयता के लिए एक आवश्यक शर्त है।
- अवकलनीयता किसी बिंदु पर एक अनूठी स्पर्श रेखा के अस्तित्व को सुनिश्चित करती है, जो न्यूनीकरण और सन्निकटन के लिए आवश्यक है।

10. अंतिम नोट्स

- अवकलनीयता से पहले हमेशा सातत्यता जाँचें।
- लॉपीटल नियम का प्रयोग केवल अनिर्धारित रूपों के लिए करें।
- सीमाओं, सातत्यता और अवकलनीयता से संबंधित अभ्यास समस्याओं का अभ्यास करके समझ को मजबूत करें।

