अध्ययन नोट्स: सीमा, सांतत्य और अवकलनीयता

विषय सूची

1. **सीमा का परिचय**
2. **सीमाओं के गुण**
3. **महत्वपूर्ण सीमा प्रमेय**
4. **विशेष सीमा रूप**
5. **मुख्य अवधारणाओं का सारांश**

1. सीमा का परिचय

सीमा की परिभाषा

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

मुख्य अवधारणाएँ

- **सीमा का अस्तित्व**: यदि $x \to a$ होने पर $f(x)$ किसी निश्चित संख्या की ओर अग्रसर होता है, तो सीमा विद्यमान होती है।
- **सीमा संकेतन**: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ का अर्थ है कि $x \to a$ होने पर $f(x)$, L की ओर अग्रसर होता है।

2. सीमाओं के गुण

बीजगणितीय गुण

यदि $\lim_{x \to a} f(x) = l$ और $\lim_{x \to a} g(x) = m$ हो, तो:

SATHEE

© 2023-2025 Copyright SATHEE

गुण	सूत्र	विवरण
योग नियम	$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = l + m$	योग की सीमा, सीमाओं के योग के बराबर होती है।
अंतर नियम	$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = l - m$	अंतर की सीमा, सीमाओं के अंतर के बराबर होती है।
गुणन नियम	$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$	गुणनफल की सीमा, सीमाओं के गुणनफल के बराबर होती है।
स्थिरांक गुणक नियम	$\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot l$	किसी स्थिरांक और फ़ंक्शन के गुणनफल की सीमा, स्थिरांक और सीमा के गुणनफल के बराबर होती है।

सैंडविच प्रमेय (स्क्वीज़ प्रमेय)

$$\lim_{x \to a} g(x) = l$$

3. महत्वपूर्ण सीमा प्रमेय

मूलभूत सीमाएँ

- $\lim_{x \to a} c = c$, जहाँ c एक स्थिरांक है।
- $\lim_{x \to a} x = a$
- $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

घातांकीय और लघुगणकीय सीमाएँ

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

4. विशेष सीमा रूप

रूप: 1^∞

यह एक अनिर्धार्य रूप है। इसकी सीमा का मूल्यांकन इस प्रकार किया जा सकता है:

$$\lim_{x \to a} [1 + f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)}$$

शर्तें: - $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ - $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$

© 2023-2025 Copyright SATHEE

रूप: $\infty - \infty$

यह भी एक अनिर्धार्य रूप है। इसे हल करने के लिए बीजगणितीय प्रक्रियाओं जैसे गुणनखंडन या युक्तिसंगत बनाने की आवश्यकता होती है।

5. मुख्य अवधारणाओं का सारांश

सारांश तालिका

अवधारणा	विवरण
सीमा	वह मान जिसकी ओर कोई फ़ंक्शन तब अग्रसर होता है जब इनपुट किसी विशेष मान के निकट आता है।
सांतत्य	कोई फ़ंक्शन $x = a$ पर सतत होता है यदि $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ हो।
अवकलनीयता	कोई फ़ंक्शन $x = a$ पर अवकलनीय होता है यदि उस बिंदु पर अवकलज विद्यमान हो।
सीमा प्रमेय	सीमाओं के मूल्यांकन के नियम, जिनमें योग, अंतर, गुणन और स्थिरांक गुणक नियम शामिल हैं।
सैंडविच प्रमेय	किसी फ़ंक्शन को दो अन्य फ़ंक्शनों के बीच सीमित करके सीमा का मूल्यांकन करने की विधि।
विशेष सीमा रूप	अनिर्धार्य रूप जैसे 1^{∞} और $\infty - \infty$, जिनके लिए विशेष तकनीकों की आवश्यकता होती है।

6. उदाहरण और अनुप्रयोग

उदाहरण 1: $\lim_{x \to 2} (3x + 4)$ का मान ज्ञात करें

$$\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3(2) + 4 = 6 + 4 = 10$$

उदाहरण 2: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ का मान ज्ञात करें

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

उदाहरण 3: $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ का मान ज्ञात करें

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

© 2023-2025 Copyright SATHEE

7. अंतिम टिप्पणियाँ

- **सीमाएँ** कैलकुलस का आधार हैं और **सांतत्य** तथा **अवकलन** के लिए मूलभूत हैं।
- **विशेष सीमा रूपों** के मूल्यांकन में प्रतिस्थापन, गुणनखंडन या श्रेणी विस्तार जैसी तकनीकों का सावधानीपूर्वक अनुप्रयोग आवश्यक है।
- जटिल सीमाओं का मूल्यांकन करते समय हमेशा **सांतत्य** और **अवकलनीयता** की जाँच करें।

SATHEE

© 2023-2025 Copyright SATHEE