

अध्ययन नोट्स: वास्तविक फलन और उनके गुण

विषय सूची

1. वास्तविक फलनों का परिचय
2. वास्तविक फलनों में मुख्य अवधारणाएँ
3. वास्तविक फलनों के प्रकार
4. वास्तविक फलनों के गुण और विशेषताएँ
5. वास्तविक फलनों के अनुप्रयोग
6. सारांश और पुनरावलोकन

1. वास्तविक फलनों का परिचय

- **डोमेन:** सभी इनपुट मानों का समुच्चय जिनके लिए फलन परिभाषित है।
- **कोडोमेन:** संभावित आउटपुट मानों का समुच्चय।
- **परिसर:** फलन द्वारा उत्पन्न आउटपुट का वास्तविक समुच्चय।

2. वास्तविक फलनों में मुख्य अवधारणाएँ

2.1 फलन की परिभाषा

- **इनपुट:** $x \in A$ (डोमेन)
- **आउटपुट:** $f(x) \in B$ (कोडोमेन)

2.2 संकेतन और निरूपण

- **फलन संकेतन:** $f(x)$, जहाँ f फलन का नाम है और x इनपुट चर है।
- **फलन का ग्राफ:** निर्देशांक तल में सभी बिंदुओं $(x, f(x))$ का समुच्चय।

3. वास्तविक फलनों के प्रकार

3.1 बहुपदीय फलन

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- **घात:** बहुपद में x की उच्चतम घात।
- **उदाहरण:**

- रैखिक: $f(x) = mx + b$
- द्विघात: $f(x) = ax^2 + bx + c$
- घन: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3.2 परिमेय फलन

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- **डोमेन:** सभी वास्तविक संख्याएँ जहाँ $Q(x) \neq 0$ ।
- **अनंतस्पर्शी:** खड़ी अनंतस्पर्शी वहाँ होती हैं जहाँ $Q(x) = 0$, और क्षैतिज अनंतस्पर्शी $P(x)$ और $Q(x)$ की घातों पर निर्भर करती हैं।

3.3 घातांकीय फलन

$$f(x) = a \cdot b^x, \text{ जहाँ } b > 0$$

- **आधार:** b , जो वृद्धि या क्षय की दर निर्धारित करता है।
- **अनुप्रयोग:** जनसंख्या वृद्धि, रेडियोधर्मी क्षय, चक्रवृद्धि ब्याज का मॉडलिंग।

3.4 लघुगणकीय फलन

$$f(x) = \log_b(x)$$

- **डोमेन:** $x > 0$
- **परिसर:** सभी वास्तविक संख्याएँ
- **आधार:** $b > 0, b \neq 1$

3.5 त्रिकोणमितीय फलन

फलन	डोमेन	परिसर	आवर्त
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	2π
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$	2π
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	\mathbb{R}	π

4. वास्तविक फलनों के गुण और विशेषताएँ

4.1 सांतत्य

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- **सतत फलन:** एक फलन किसी अंतराल पर सतत होता है यदि वह उस अंतराल के प्रत्येक बिंदु पर सतत हो।

4.2 अवकलनीयता

- **अवकलनीय फलन:** एक फलन किसी अंतराल पर अवकलनीय होता है यदि वह उस अंतराल के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय हो।

4.3 एकदिष्टता

- **वर्धमान फलन:** सभी $x_1 < x_2$ के लिए $f(x_1) < f(x_2)$
- **हासमान फलन:** सभी $x_1 < x_2$ के लिए $f(x_1) > f(x_2)$

4.4 विषम और सम फलन

- **सम फलन:** $f(-x) = f(x)$
- **विषम फलन:** $f(-x) = -f(x)$

5. वास्तविक फलनों के अनुप्रयोग

5.1 वास्तविक-विश्व की घटनाओं का मॉडलिंग

- **भौतिकी:** गति, वेग, त्वरण।
- **अर्थशास्त्र:** लागत, राजस्व, लाभ।
- **जीवविज्ञान:** जनसंख्या वृद्धि, पदार्थों का क्षय।
- **इंजीनियरिंग:** संकेत प्रसंस्करण, नियंत्रण प्रणालियाँ।

5.2 अनुकूलन समस्याएँ

- **अधिकतमीकरण/न्यूनतमीकरण:** फलनों के अधिकतम या न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिए अवकलजों का उपयोग करना।
- **उदाहरण:** लाभ अधिकतम करना, लागत न्यूनतम करना, संसाधन आवंटन का अनुकूलन।

6. सारांश और पुनरावलोकन

मुख्य अवधारणाओं का पुनरावलोकन

अवधारणा	विवरण
फलन	नियम जो प्रत्येक इनपुट को ठीक एक आउटपुट निर्दिष्ट करता है
डोमेन	सभी संभावित इनपुट का समुच्चय
कोडोमेन	सभी संभावित आउटपुट का समुच्चय
परिसर	आउटपुट का वास्तविक समुच्चय
बहुपदीय	गैर-ऋणात्मक पूर्णांक घात वाले पदों का योग
परिमेय	दो बहुपदों का अनुपात
घातांकीय	चर घातांक वाला आधार
लघुगणकीय	घातांकीय का प्रतिलोम
त्रिकोणमितीय	त्रिभुजों के कोणों और भुजाओं से संबंधित

7. अभ्यास प्रश्न

1. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ का डोमेन ज्ञात कीजिए।
2. निर्धारित कीजिए कि $f(x) = x^3$ विषम है या सम।
3. $f(x) = \log_2(x)$ का ग्राफ खींचिए।
4. हल कीजिए: $0 \leq x < 2\pi$ के लिए $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ।

8. अतिरिक्त संसाधन

- [विकिपीडिया: फलन](#)
- [खान अकादमी: फलन](#)
- [पॉल की ऑनलाइन गणित नोट्स: फलन](#)

9. अंतिम नोट्स

- हमेशा सुनिश्चित करें कि किसी फलन का **डोमेन** स्पष्ट रूप से परिभाषित हो।
- ग्राफ़ फलनों के व्यवहार को कल्पना करने में सहायक होते हैं।
- अभ्यास प्रश्न फलनों के गुणों को समझने को मजबूत करते हैं।

- वास्तविक फलन गणित और उसके अनुप्रयोगों में आधारभूत होते हैं।

