अध्ययन नोट्स: गणना और क्रमपरिवर्तन के मूलभूत सिद्धांत

विषयसूची

1. **गणना के मूलभूत सिद्धांतों का परिचय**
2. **क्रमपरिवर्तन की बुनियादी अवधारणाएँ**
3. **क्रमपरिवर्तन पर महत्वपूर्ण परिणाम**
4. 3.1 व्यवस्थाएँ
5. 3.2 विपर्यय
6. 3.3 अंकों का योग
7. **अनुप्रयोग और उदाहरण**
8. **सारांश और प्रमुख सूत्र**

1. गणना के मूलभूत सिद्धांतों का परिचय

गणना का मूलभूत सिद्धांत संयोजन गणित में एक बुनियादी अवधारणा है, जिसका उपयोग क्रियाओं के एक क्रम को करने के तरीकों की संख्या निर्धारित करने के लिए किया जाता है।

2. क्रमपरिवर्तन की बुनियादी अवधारणाएँ

2.1 क्रमपरिवर्तन की परिभाषा

$$P(n) = n!$$

SATHEE

3. क्रमपरिवर्तन पर महत्वपूर्ण परिणाम

3.1 व्यवस्थाएँ

3.1.1 m और n विभिन्न वस्तुओं की व्यवस्था

- **शर्त**: $m + 1 \geq n$
- **उद्देश्य**: m और n विभिन्न वस्तुओं को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित करना कि **दूसरी श्रेणी की कोई दो वस्तुएँ एक साथ न हों**।
- **सूत्र**:

$$\text{तरीकों की संख्या} = m! \times P(m + 1, n)$$

© 2023-2025 Copyright SATHEE

जहाँ $P(m+1, n)$, $m+1$ वस्तुओं में से n वस्तुओं के क्रमपरिवर्तनों की संख्या है।

3.1.2 दूसरी श्रेणी की सभी वस्तुओं को एक साथ रखकर व्यवस्था

- **शर्त**: $m \geq n$
- **उद्देश्य**: m और n विभिन्न वस्तुओं को एक पंक्ति में इस प्रकार व्यवस्थित करना कि **दूसरी श्रेणी की सभी वस्तुएँ एक साथ हों**।
- **सूत्र**:

$$\text{तरीकों की संख्या} = (m+1)! \times n!$$

3.2 विपर्यय

3.2.1 परिभाषा

3.2.2 विपर्यय के लिए सूत्र

n वस्तुओं के लिए, विपर्ययों की संख्या इस प्रकार दी जाती है:

$$D(n) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

3.3 अंकों का योग

3.3.1 सभी दिए गए n अंकों (0 को छोड़कर) द्वारा बनाई गई संख्याओं का योग

- **सूत्र**:

$$\text{योग} = (\text{सभी n अंकों का योग}) \times (n-1)! \times \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ बार}}$$

3.3.2 सभी दिए गए n अंकों (0 सहित) द्वारा बनाई गई संख्याओं का योग

- **सूत्र**:

$$\text{योग} = (\text{सभी n अंकों का योग}) \times \left[(n-1)! \times \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ बार}} - (n-2) \times \underbrace{111\ldots1}_{(n-1) \text{ बार}}\right]$$

SATHEE

© 2023-2025 Copyright SATHEE

4. अनुप्रयोग और उदाहरण

4.1 उदाहरण: अक्षरों की व्यवस्था

प्रश्न: "PERMUTATIONS" शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि कोई दो स्वर एक साथ न आएं?

हल: - कुल अक्षर: 12 - स्वर: E, U, A, I, O (5 स्वर) - व्यंजन: P, R, M, T, N, S, T (7 व्यंजन, दोहराव के साथ)

चरण 1: व्यंजन व्यवस्थित करें।

$$\text{व्यंजनों को व्यवस्थित करने के तरीके} = \frac{7!}{2!} \quad (\text{चूंकि T दोहराया जाता है})$$

चरण 2: स्वरों को अंतराल में रखें। - व्यंजनों के बीच अंतराल: 8 - 5 अंतराल चुनें: $\binom{8}{5}$

चरण 3: स्वरों को व्यवस्थित करें।

$$\text{स्वरों को व्यवस्थित करने के तरीके} = 5!$$

अंतिम उत्तर:

$$\frac{7!}{2!} \times \binom{8}{5} \times 5!$$

4.2 उदाहरण: विपर्यय

प्रश्न: 5 पत्रों को कितने तरीकों से विपर्यित किया जा सकता है ताकि कोई पत्र अपनी मूल स्थिति में न हो?

हल:

$$D(5) = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$

SATHEE

© 2023-2025 Copyright SATHEE

5. सारांश और प्रमुख सूत्र

अवधारणा	सूत्र
क्रमपरिवर्तन	$P(n) = n!$
विपर्यय	$D(n) = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$
व्यवस्थाएँ (m+n)	$m! \times P(m+1, n)$
अंकों का योग (0 हटकर)	योग = (सभी n अंकों का योग) $\times (n-1)! \times \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ बार}}$
अंकों का योग (0 सहित)	योग = (सभी n अंकों का योग) $\times \left[(n-1)! \times \underbrace{111\ldots1}_{n \text{ बार}} - (n-2) \times \underbrace{111\ldots1}_{(n-1) \text{ बार}}\right]$

6. महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

7. अंतिम टिप्पणियाँ

- **प्रमुख शब्दावली**: क्रमपरिवर्तन, विपर्यय, गणना का मूलभूत सिद्धांत, अंकों का योग।
- **अनुप्रयोग**: अक्षरों की व्यवस्था, वस्तुओं को विपर्यय करना, संख्याएँ बनाना।
- **सूत्रों की मुख्य विशेषताएं**: जटिल संयोजन समस्याओं को हल करने के लिए फैक्टोरियल, क्रमपरिवर्तन और विपर्यय सूत्रों का उपयोग।

SATHEE

© 2023-2025 Copyright SATHEE