अध्ययन नोट्स: सारणिक और आव्यूह के व्युत्क्रम

विषय सूची

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल सारणिकों का उपयोग करना

1.1 क्षेत्रफल गणना के लिए सूत्र

शीर्ष बिंदु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, और $C(x_3, y_3)$ वाले त्रिभुज $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

1.2 संरेखता जाँच

तीन बिंदु **संरेख** होते हैं यदि निम्न आव्यूह का सारणिक शून्य है:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

यह स्थिति संरेखता के लिए आवश्यक और पर्याप्त है।

2. सारणिकों के गुणधर्म

2.1 लघु और सहखंडज

- **लघु** M_{ij}: iवीं पंक्ति और jवें स्तंभ को हटाकर प्राप्त सारणिक।
- **सहखंडज** C_{ij}:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2.2 मुख्य गुणधर्म

गुण	विवरण
पंक्ति/स्तंभ विनिमय	दो पंक्तियों/स्तंभों को बदलने से सारणिक का चिह्न बदल जाता है।
पंक्ति/स्तंभ गुणन	किसी पंक्ति/स्तंभ को अदिश k से गुणा करने पर सारणिक k गुना हो जाता है।
पंक्ति/स्तंभ योग	एक पंक्ति/स्तंभ के गुणज को दूसरी में जोड़ने से सारणिक नहीं बदलता।
त्रिभुजाकार आव्यूह	त्रिभुजाकार आव्यूह (ऊपरी/निचला) का सारणिक उसके विकर्ण अवयवों का गुणनफल होता है।
शून्य पंक्ति/स्तंभ	यदि कोई पंक्ति/स्तंभ पूर्णतः शून्य है, तो सारणिक शून्य होता है।
गुणनफल का सारणिक	वर्ग आव्यूह A और B के लिए, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$।

2.3 विशेष स्थितियाँ

- **तत्समक आव्यूह**: $\det(I) = 1$।
- **अदिश गुणन**: $A = kI_n$ के लिए, $\det(A) = k^n$।

3. आव्यूह का सहखंडज और व्युत्क्रम

3.1 आव्यूह का सहखंडज

- आव्यूह A का **सहखंडज** (या adjugate) उसके सहखंडज आव्यूह का परिवर्त होता है।
- 2×2 आव्यूह के लिए:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3.2 आव्यूह का व्युत्क्रम

- एक आव्यूह A **व्युत्क्रमणीय** होता है यदि $|A| \neq 0$।
- **व्युत्क्रम सूत्र**:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

- **व्युत्क्रम ज्ञात करने के चरण**:
- सारणिक $|A|$ की गणना करें।
- लघु आव्यूह ज्ञात करें।

- सहखंडज चिह्न लगाकर सहखंडज आव्यूह बनाएँ।
- सहखंडज आव्यूह का परिवर्त लेकर सहखंडज प्राप्त करें।
- $\frac{1}{|A|}$ से गुणा करें।

3.3 व्युत्क्रम के गुणधर्म

- **गुणनफल का व्युत्क्रम**: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$।
- **व्युत्क्रम का व्युत्क्रम**: $(A^{-1})^{-1} = A$।
- **व्युत्क्रम का परिवर्त**: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$।

4. सारांश

4.1 मुख्य सूत्र

- **त्रिभुज का क्षेत्रफल**:

$$\frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

- 2×2 **आव्यूह का सारणिक**:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- 2×2 **आव्यूह का व्युत्क्रम**:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

4.2 महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

4.3 अनुप्रयोग

- **ज्यामिति**: क्षेत्रफल की गणना और संरेखता की जाँच।
- **रैखिक बीजगणित**: समीकरण प्रणालियों को हल करना और आव्यूह गुणों का विश्लेषण।

5. तुलनात्मक तालिका: सारणिक संक्रियाएँ

संक्रिया	सारणिक पर प्रभाव
पंक्तियों/स्तंभों का विनिमय	चिह्न परिवर्तित होता है
किसी पंक्ति/स्तंभ को k से गुणा करना	k गुना हो जाता है
एक पंक्ति/स्तंभ के गुणज को दूसरी में जोड़ना	कोई परिवर्तन नहीं
आव्यूह का परिवर्त लेना	सारणिक समान रहता है

6. उदाहरण: 2×2 आव्यूह का व्युत्क्रम

आव्यूह:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

चरण 1: सारणिक की गणना:

$$|A| = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

चरण 2: सहखंडज ज्ञात करें:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

चरण 3: व्युत्क्रम की गणना:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. अंतिम टिप्पणियाँ

- व्युत्क्रम ज्ञात करने से पहले हमेशा सत्यापित करें कि $|A| \neq 0$।
- सारणिक आइगेनमान और आयतन गणना जैसे उन्नत विषयों के लिए आधारभूत हैं।
- समझ को मजबूत करने के लिए पंक्ति संक्रियाओं और सहखंडज विस्तार वाले प्रश्नों का अभ्यास करें।