अध्ययन नोट्स: सारणिक

विषय सूची

1. **सारणिक का परिचय**
2. **सारणिक के गुणधर्म**
3. **मुख्य अवधारणाएँ और प्रमेय**
4. **महत्वपूर्ण सूत्र और समीकरण**
5. **उदाहरण और अनुप्रयोग**
6. **मुख्य बिंदुओं का सारांश**

1. सारणिक का परिचय

सारणिक वे अदिश मान हैं जिनकी गणना एक वर्ग मैट्रिक्स के अवयवों से की जा सकती है और ये मैट्रिक्स के कुछ गुणों को कोडित करते हैं। इनका उपयोग गणित के विभिन्न क्षेत्रों में किया जाता है, जैसे रैखिक बीजगणित, कैलकुलस और अवकल समीकरण।

मुख्य अवधारणाएँ

- सारणिक केवल वर्ग मैट्रिक्स के लिए परिभाषित होता है।
- यह मैट्रिक्स के बारे में जानकारी प्रदान करता है, जैसे कि क्या यह व्युत्क्रमणीय है।
- मैट्रिक्स के सारणिक को $\det(A)$ या $|A|$ से दर्शाया जाता है।

2. सारणिक के गुणधर्म

सारणिक के कई महत्वपूर्ण गुणधर्म होते हैं जो गणनाओं को सरल बनाने और उनके व्यवहार को समझने में उपयोगी होते हैं।

2.1 मूल गुणधर्म

- **शून्य पंक्ति/स्तंभ**: यदि किसी मैट्रिक्स की कोई पंक्ति या स्तंभ पूर्णतः शून्य है, तो सारणिक 0 होता है।
- **पंक्ति/स्तंभ अदला-बदली**: दो पंक्तियों या स्तंभों को बदलने पर सारणिक का चिह्न बदल जाता है।
- **अदिश गुणन**: किसी पंक्ति या स्तंभ को एक अदिश k से गुणा करने पर सारणिक k से गुणा हो जाता है।
- **तत्समक मैट्रिक्स**: तत्समक मैट्रिक्स का सारणिक 1 होता है।
- **त्रिभुजाकार मैट्रिक्स**: एक त्रिभुजाकार मैट्रिक्स (ऊपरी या निचली) का सारणिक विकर्ण अवयवों का गुणनफल होता है।

2.2 पंक्तियों/स्तंभों पर संक्रियाएँ

- **पंक्ति योग**: एक पंक्ति के गुणज को दूसरी पंक्ति में जोड़ने से सारणिक नहीं बदलता।
- **पंक्ति गुणन**: किसी पंक्ति को अदिश k से गुणा करने पर सारणिक k से गुणा हो जाता है।
- **पंक्ति अदला-बदली**: दो पंक्तियों को बदलने पर सारणिक -1 से गुणा हो जाता है।

3. मुख्य अवधारणाएँ और प्रमेय

3.1 सारणिक की परिभाषा

2x2 मैट्रिक्स के लिए:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc$$

3x3 मैट्रिक्स के लिए:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad \det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

3.2 प्रमेय: व्युत्क्रमणीयता

एक वर्ग मैट्रिक्स A व्युत्क्रमणीय होती है यदि और केवल यदि $\det(A) \neq 0$।

3.3 प्रमेय: गुणनात्मक गुणधर्म

समान आकार के दो वर्ग मैट्रिक्स A और B के लिए:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

4. महत्वपूर्ण सूत्र और समीकरण

4.1 2x2 मैट्रिक्स का सारणिक

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

4.2 3x3 मैट्रिक्स का सारणिक (सरस नियम या सहखंड प्रसार)

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

4.3 त्रिभुजाकार मैट्रिक्स का सारणिक

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}\right) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

5. उदाहरण और अनुप्रयोग

5.1 उदाहरण: 2x2 सारणिक

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = (2 \cdot 5) - (3 \cdot 4) = 10 - 12 = -2$$

5.2 उदाहरण: 3x3 सारणिक

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = -3 + 12 - 9 =$$

5.3 अनुप्रयोग: व्युत्क्रमणीयता जाँच

दिया है:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

अतः, A व्युत्क्रमणीय है।

6. मुख्य बिंदुओं का सारांश

सारणिक में मुख्य अवधारणाएँ

अवधारणा	विवरण
सारणिक	एक वर्ग मैट्रिक्स का अदिश मान
व्युत्क्रमणीयता	एक मैट्रिक्स व्युत्क्रमणीय है यदि $\det(A) \neq 0$
त्रिभुजाकार मैट्रिक्स	सारणिक विकर्ण अवयवों का गुणनफल होता है
पंक्ति/स्तंभ अदला-बदली	सारणिक के चिह्न को बदल देता है
अदिश गुणन	सारणिक को अदिश से गुणा कर देता है

महत्वपूर्ण सूत्र

मैट्रिक्स	सारणिक सूत्र
2x2	$ad - bc$
3x3	$a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$
त्रिभुजाकार	विकर्ण अवयवों का गुणनफल

मुख्य गुणधर्म

- एक पंक्ति के गुणज को दूसरी पंक्ति में जोड़ने से सारणिक नहीं बदलता।
- दो पंक्तियों को बदलने पर सारणिक -1 से गुणा हो जाता है।
- किसी पंक्ति को अदिश से गुणा करने पर सारणिक उस अदिश से गुणा हो जाता है।
- तत्समक मैट्रिक्स का सारणिक 1 होता है।

7. निष्कर्ष

सारणिक रैखिक बीजगणित में मौलिक हैं और विभिन्न अनुप्रयोगों में उपयोग किए जाते हैं, जैसे रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करना, अभिलाक्षणिक मान ज्ञात करना और मैट्रिक्स की व्युत्क्रमणीयता की जाँच करना। उनके गुणधर्मों और उनकी गणना करने के तरीकों को समझना उन्नत गणितीय कार्य के लिए आवश्यक है।