अध्ययन नोट्स: मैट्रिक्स सिद्धांत

विषय सूची

1. परिभाषाएँ और मूल अवधारणाएँ

1.1 मैट्रिक्स की परिभाषा

एक मैट्रिक्स संख्याओं, प्रतीकों या व्यंजकों का एक आयताकार सारणी है जिसे पंक्तियों और स्तंभों में व्यवस्थित किया जाता है। इसका उपयोग रैखिक परिवर्तनों और रैखिक समीकरणों के निकाय को निरूपित करने के लिए किया जाता है।

1.2 मैट्रिक्स के अवयव

- मैट्रिक्स में प्रत्येक व्यक्तिगत संख्या या प्रतीक को **अवयव** या **प्रविष्टि** कहा जाता है।
- अवयवों को उनकी **पंक्ति** और **स्तंभ** स्थिति द्वारा पहचाना जाता है, जिसे a_{ij} से निरूपित किया जाता है, जहाँ i पंक्ति संख्या है और j स्तंभ संख्या है।

1.3 मैट्रिक्स संकेतन

- एक मैट्रिक्स को आम तौर पर बड़े अक्षरों द्वारा निरूपित किया जाता है (जैसे, A, B)।

- मैट्रिक्स का आकार **पंक्तियाँ × स्तंभ** के रूप में निर्दिष्ट किया जाता है। उदाहरण के लिए, 3 पंक्तियों और 4 स्तंभों वाला मैट्रिक्स एक **3×4 मैट्रिक्स** है।

2. मैट्रिक्स के प्रकार

2.1 शून्य मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: एक मैट्रिक्स जिसके सभी अवयव शून्य होते हैं।
- **उदाहरण**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **नोट**: इसे **जीरो मैट्रिक्स** भी कहा जाता है।

2.2 पंक्ति मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: केवल एक पंक्ति वाला मैट्रिक्स।
- **उदाहरण**: $[a\ b\ c]$ (1×3 मैट्रिक्स)
- **महत्वपूर्ण बिंदु**: स्तंभों की संख्या कोई भी धनात्मक पूर्णांक हो सकती है।

2.3 स्तंभ मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: केवल एक स्तंभ वाला मैट्रिक्स।
- **उदाहरण**:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

- **महत्वपूर्ण बिंदु**: पंक्तियों की संख्या कोई भी धनात्मक पूर्णांक हो सकती है।

2.4 वर्ग मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: एक मैट्रिक्स जिसमें पंक्तियों और स्तंभों की संख्या बराबर होती है।
- **उदाहरण**:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- **महत्वपूर्ण बिंदु**: वर्ग मैट्रिक्स का क्रम पंक्तियों (या स्तंभों) की संख्या द्वारा दिया जाता है।

2.5 आयताकार मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: एक मैट्रिक्स जिसमें पंक्तियों और स्तंभों की संख्या असमान होती है।
- **उदाहरण**:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- **महत्वपूर्ण बिंदु**: असमान चर वाले समीकरणों के निकाय में आमतौर पर उपयोग किया जाता है।

2.6 विकर्ण मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: एक वर्ग मैट्रिक्स जिसमें सभी गैर-विकर्ण अवयव शून्य होते हैं।
- **उदाहरण**:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

- **नोट**: विकर्ण अवयव गैर-शून्य या शून्य हो सकते हैं।

2.7 अदिश मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: एक विकर्ण मैट्रिक्स जिसमें सभी विकर्ण अवयव समान होते हैं।
- **उदाहरण**:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

- **महत्वपूर्ण बिंदु**: अदिश मैट्रिक्स, विकर्ण मैट्रिक्स का एक विशेष मामला है।

2.8 पहचान मैट्रिक्स

- **परिभाषा**: एक अदिश मैट्रिक्स जिसमें सभी विकर्ण अवयव 1 होते हैं।
- **उदाहरण**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **संकेतन**: एक $n \times n$ मैट्रिक्स के लिए I_n के रूप में निरूपित किया जाता है।
- **गुणधर्म**: किसी भी मैट्रिक्स को पहचान मैट्रिक्स से गुणा करने पर वह अपरिवर्तित रहता है।

2.9 त्रिकोणीय मैट्रिक्स

- **ऊपरी त्रिकोणीय मैट्रिक्स**: मुख्य विकर्ण के **नीचे** के सभी अवयव शून्य होते हैं।

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

- **निचला त्रिकोणीय मैट्रिक्स**: मुख्य विकर्ण के **ऊपर** के सभी अवयव शून्य होते हैं।

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

- **महत्वपूर्ण बिंदु**: दोनों प्रकार वर्ग मैट्रिक्स होते हैं।

3. मुख्य अवधारणाओं का सारांश

सारांश तालिका

मैट्रिक्स प्रकार	विवरण	उदाहरण
शून्य मैट्रिक्स	सभी अवयव शून्य होते हैं	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
पंक्ति मैट्रिक्स	एकल पंक्ति, एकाधिक स्तंभ	$[a\ b\ c]$
स्तंभ मैट्रिक्स	एकल स्तंभ, एकाधिक पंक्तियाँ	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$
वर्ग मैट्रिक्स	पंक्तियों और स्तंभों की समान संख्या	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
आयताकार मैट्रिक्स	असमान पंक्तियाँ और स्तंभ	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$
विकर्ण मैट्रिक्स	गैर-विकर्ण अवयव शून्य होते हैं	$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$
अदिश मैट्रिक्स	विकर्ण अवयव समान होते हैं	$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$
पहचान मैट्रिक्स	विकर्ण अवयव 1 होते हैं, अन्य शून्य	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
त्रिकोणीय मैट्रिक्स	विकर्ण के ऊपर/नीचे अवयव शून्य होते हैं	ऊपरी: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$

नोट्स

- **मैट्रिक्स संक्रियाएँ**: जोड़, घटाव, गुणा और व्युत्क्रमण, मैट्रिक्स प्रकारों पर आधारित विशिष्ट नियमों का पालन करते हैं।
- **अनुप्रयोग**: मैट्रिक्स रैखिक बीजगणित, कंप्यूटर ग्राफिक्स, इंजीनियरिंग और डेटा विज्ञान में मौलिक हैं।