

अध्ययन नोट्स: सम्मिश्र संख्याएँ और उनके गुण

विषय सूची

1. सम्मिश्र संख्याओं का परिचय
2. सम्मिश्र संख्याओं के साथ मूल संक्रियाएँ
3. सम्मिश्र संख्या का संयुग्म
4. सम्मिश्र संख्या का मापांक
5. मापांक और संयुग्म के गुण
6. त्रिभुज असमिका
7. सम्मिश्र संख्या का व्युत्क्रम
8. सम्मिश्र संख्याओं का घातांक
9. मुख्य सूत्रों और अवधारणाओं का सारांश

1. सम्मिश्र संख्याओं का परिचय

एक सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ के रूप का एक संख्या होती है, जहाँ: - x वास्तविक भाग है - y काल्पनिक भाग है - i काल्पनिक इकाई है, जिसे $i = \sqrt{-1}$ के रूप में परिभाषित किया गया है

सम्मिश्र संख्याओं का उपयोग उन राशियों को निरूपित करने के लिए किया जाता है जिनमें परिमाण और दिशा दोनों होते हैं, जैसे कि 2डी स्थान में सदिश।

2. सम्मिश्र संख्याओं के साथ मूल संक्रियाएँ

2.1 जोड़ और घटाव

SATHEE

- **जोड़:** $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- **घटाव:** $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$

2.2 गुणा

- $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

2.3 भाग

- $\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$

3. सम्मिश्र संख्या का संयुग्म

सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का संयुग्म \bar{z} द्वारा निरूपित किया जाता है और इसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\bar{z} = x - iy$$

संयुग्म के मुख्य गुण

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z_1 \bar{+} z_2 = \bar{z_1} + z_2$
- $z_1 \bar{z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
- $z_1 \bar{/} z_2 = \bar{z_1} / \bar{z_2}$

4. सम्मिश्र संख्या का मापांक

सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ का मापांक (या निरपेक्ष मान) $|z|$ द्वारा निरूपित किया जाता है और इसे इस प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

मापांक के मुख्य गुण

- $|z| \geq 0$, समानता तभी होती है जब $z = 0$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1 z_2)$

SATHEE

5. मापांक और संयुग्म के गुण

गुण	विवरण
गुणनफल का मापांक	$ z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 $
भागफल का मापांक	$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$
घात का मापांक	$ z^n = z ^n, \text{जहाँ } n \in \mathbb{N}$
गुणनफल का संयुग्म	$z_1 \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
भागफल का संयुग्म	$\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

6. त्रिभुज असमिका

त्रिभुज असमिका सम्मिश्र संख्याओं का एक मूलभूत गुण है और इस प्रकार बताई जाती है:

6.1 असमिका (a)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

6.2 असमिका (b)

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

6.3 असमिका (c)

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

6.4 असमिका (d)

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

ये असमिकाएँ सम्मिश्र व्यंजकों के परिमाण को परिबद्ध करने में उपयोगी होती हैं।

7. सम्मिश्र संख्या का व्युत्क्रम

एक अशून्य सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ के लिए, व्युत्क्रम निम्न प्रकार दिया जाता है:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

उदाहरण

यदि $z = 1 + i$, तब: - $\bar{z} = 1 - i$ - $|z|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ - $z^{-1} = \frac{1 - i}{2}$

8. सम्मिश्र संख्याओं का घातांक

8.1 घातों का मापांक

$$|z^n| = |z|^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

8.2 सम्मिश्र संख्याओं के घात

सम्मिश्र संख्या के घात को गुण का उपयोग करते हुए पुनरावर्ती रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$z^n = z^{n-1} \cdot z$$

9. मुख्य सूत्रों और अवधारणाओं का सारांश

अवधारणा	सूत्र
संयुग्म	$\bar{z} = x - iy$
मापांक	$ z = \sqrt{x^2 + y^2}$
व्युत्क्रम	$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$
गुणनफल का मापांक	$ z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 $
त्रिभुज असमिका	$ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $
घात का मापांक	$ z^n = z ^n$

SATHEE

निष्कर्ष

सम्मिश्र संख्याएँ गणित और इंजीनियरिंग में आवश्यक होती हैं, जो परिमाण और दिशा दोनों वाली राशियों का निरूपण करने की अनुमति देती हैं। संयुग्म, मापांक और त्रिभुज असमिकाओं जैसे उनके गुणों को समझना विभिन्न

क्षेत्रों में उन्नत समस्या-समाधान के लिए महत्वपूर्ण है। यह अध्ययन मार्गदर्शिका सम्मिश्र संख्याओं से संबंधित मुख्य अवधारणाओं और सूत्रों का एक संरचित अवलोकन प्रदान करती है।

