अध्ययन नोट्स: समुच्चयों का बीजगणित

विषय सूची

1. समुच्चय बीजगणित का परिचय

समुच्चय बीजगणित गणित की एक मूलभूत अवधारणा है जो विभिन्न संक्रियाओं और नियमों का उपयोग करके समुच्चयों के हेरफेर और संयोजन से संबंधित है। यह तर्क, संभाव्यता और कंप्यूटर विज्ञान सहित गणित के कई क्षेत्रों का आधार बनाता है।

2. समुच्चयों पर मूल संक्रियाएँ

2.1 समुच्चयों का संघ (Union)

दो समुच्चयों A और B का **संघ**, जिसे $A \cup B$ से दर्शाया जाता है, उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A में, B में, या दोनों में हैं।

उदाहरण:
यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$, तो
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$।

2.2 समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection)

दो समुच्चयों A और B का **सर्वनिष्ठ**, जिसे $A \cap B$ से दर्शाया जाता है, उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में सामान्य हैं।

उदाहरण:
यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$, तो
$A \cap B = \{3\}$।

2.3 समुच्चय का पूरक (Complement)

एक समुच्चय A का **पूरक**, जिसे A' से दर्शाया जाता है, सार्वत्रिक समुच्चय U के उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A में **नहीं** हैं।

उदाहरण:
यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $A = \{1, 2, 3\}$, तो
$A' = \{4, 5\}$।

2.4 समुच्चयों का अंतर (Difference)

दो समुच्चयों A और B का **अंतर**, जिसे $A - B$ से दर्शाया जाता है, उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A में हैं लेकिन B में **नहीं** हैं।

उदाहरण:
यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$, तो
$A - B = \{1, 2\}$।

3. समुच्चय गुणधर्म और नियम

3.1 साहचर्य नियम (Associative Laws)

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3.2 क्रमविनिमेय नियम (Commutative Laws)

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

3.3 वितरण नियम (Distributive Laws)

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3.4 डी मॉर्गन के नियम (De Morgan's Laws)

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

4. महत्वपूर्ण सूत्र और समीकरण

4.1 समुच्चयों का परिमाण (Cardinality)

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- $n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

4.2 तीन समुच्चयों के संघ का परिमाण

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

4.3 पूरकों का परिमाण

- $n(A^{'}) = n(U) - n(A)$
- $n(A^{'} \cup B^{'}) = n(U) - n(A \cap B)$
- $n(A^{'} \cap B^{'}) = n(U) - n(A \cup B)$

5. अनुप्रयोग और उदाहरण

5.1 उदाहरण: समुच्चय संघ और सर्वनिष्ठ

माना $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, और $C = \{5, 6, 7\}$।

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A \cap B = \{3\}$
- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

5.2 उदाहरण: पूरक और अंतर

माना $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$।

- $A^{'} = \{4, 5\}$
- $B^{'} = \{1, 2, 5\}$
- $A - B = \{1, 2\}$

6. समुच्चय संक्रियाओं पर महत्वपूर्ण परिणाम

6.1 समुच्चय अंतर और समानता

- $A - B = A$ होता है यदि और केवल यदि $A \cap B = \emptyset$
- $A - B = \emptyset$ होता है यदि और केवल यदि $A \subseteq B$

6.2 सममित अंतर (Symmetric Difference)

- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- $n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

6.3 पूरकों के साथ संघ और सर्वनिष्ठ

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

7. मुख्य सूत्रों और नियमों का सारांश

संक्रिया	प्रतीक	विवरण	सूत्र
संघ	$\cup$	A या B में अवयव	$A \cup B$
सर्वनिष्ठ	$\cap$	A और B दोनों में अवयव	$A \cap B$
पूरक	$'$	A में नहीं होने वाले अवयव	A'
अंतर	$-$	A में होने वाले लेकिन B में नहीं	$A - B$
सममित अंतर	Δ	A या B में होने वाले लेकिन दोनों में नहीं	$A \Delta B$

8. अतिरिक्त टिप्पणियाँ

- **डी मॉर्गन के नियम** जटिल समुच्चय अभिव्यक्तियों को सरल बनाने के लिए आवश्यक हैं।
- **परिमाण** समुच्चयों के आकार और उनके संबंधों को समझने में मदद करता है।
- **समुच्चय संक्रियाएँ** तर्क और संभाव्यता में अधिक उन्नत विषयों को समझने के लिए आधारभूत हैं।

9. निष्कर्ष

समुच्चय बीजगणित वस्तुओं के संग्रह का विश्लेषण और हेरफेर करने के लिए एक संरचित और शक्तिशाली ढाँचा प्रदान करता है। समुच्चयों के मूल संक्रियाओं, गुणधर्मों और नियमों को समझना गणित, कंप्यूटर विज्ञान और संबंधित

क्षेत्रों में आगे के अध्ययन के लिए महत्वपूर्ण है।