अध्ययन नोट्स: समुच्चय सिद्धांत एवं संक्रियाएँ

विषय सूची

1. समुच्चय का परिचय

1.1 समुच्चय क्या है?

एक **समुच्चय** विशिष्ट वस्तुओं का एक सुपरिभाषित संग्रह है, जो संख्याएँ, अक्षर या कोई अन्य इकाइयाँ हो सकती हैं। इन वस्तुओं को समुच्चय के **अवयव** या **सदस्य** कहा जाता है।

1.2 सार्वत्रिक समुच्चय एवं उपसमुच्चय

- **सार्वत्रिक समुच्चय**, जिसे U से दर्शाया जाता है, एक ऐसा समुच्चय है जिसमें विचाराधीन सभी अवयव समाहित होते हैं।
- **उपसमुच्चय** $A \subset U$ एक ऐसा समुच्चय है जहाँ A के सभी अवयव U के भी अवयव होते हैं।

2. समुच्चयों की मूल संक्रियाएँ

2.1 समुच्चयों का संघ

- दो समुच्चयों A एवं B का **संघ**, जिसे $A \cup B$ से दर्शाया जाता है, उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A में, B में, या दोनों में हैं।
- **गणितीय परिभाषा:**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ या } x \in B\}$$

2.2 समुच्चयों का प्रतिच्छेदन

- दो समुच्चयों A एवं B का **प्रतिच्छेदन**, जिसे $A \cap B$ से दर्शाया जाता है, उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A एवं B दोनों में हैं।
- **गणितीय परिभाषा:**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ और } x \in B\}$$

2.3 समुच्चय का पूरक

- एक समुच्चय A का **पूरक**, जिसे A', A^C, $\bar{A}$, या $U - A$ से दर्शाया जाता है, सार्वत्रिक समुच्चय U के उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A में **नहीं** हैं।
- **गणितीय परिभाषा:**

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

2.4 समुच्चयों का अंतर

- दो समुच्चयों A एवं B के बीच **अंतर**, जिसे $A - B$ से दर्शाया जाता है, A के उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो B में **नहीं** हैं।
- **गणितीय परिभाषा:**

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

2.5 समुच्चयों का सममित अंतर

- दो समुच्चयों A एवं B का **सममित अंतर**, जिसे $A \Delta B$ से दर्शाया जाता है, उन अवयवों का समुच्चय है जो A या B में हैं, परंतु दोनों में नहीं।
- **गणितीय परिभाषा:**

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

3. दृश्य निरूपण एवं आरेख

3.1 वेन आरेख

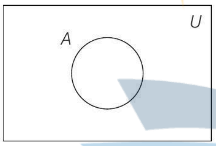
- **वेन आरेख** समुच्चयों के बीच संबंधों को दृश्यतः निरूपित करने के लिए प्रयोग किए जाते हैं।
- इनमें अतिव्यापी वृत्त होते हैं, जहाँ प्रत्येक वृत्त एक समुच्चय को प्रदर्शित करता है, और अतिव्यापी क्षेत्र प्रतिच्छेदन को दर्शाते हैं।

- **Equivalent sets** have the same number of elements but not exactly the same elements.
- A set that contains all sets in a given context is called **universal set** (U).
- Let A and B be two sets. If every element of A is an element of B, then A is called a **subset** of B, i.e. $A \subseteq B$.
- If A is a subset of B and $A \neq B$, then A is a **proper subset** of B. i.e. $A \subset B$.
- The null set φ is a subset of every set and every set is a subset of itself i.e. $\varphi \subset A$ and $A \subseteq A$ for every set A. They are called **improper subsets** of A.
- If S is any set, then the set of all the subsets of S is called the **power set** of S and it is denoted by $P(S)$. Power set of a given set is always non-empty. If A has n elements, then $P(A)$ has 2^n elements.

NOTE
- The set $\{\varphi\}$ is not a null set. It is a set containing one element φ
- Whenever we have to show that two sets A and B are equal show that $A \subseteq B$ and $B \subseteq A$.
- If a set A has m elements, then the number m is called **cardinal number** of set A and it is denoted by $n(A)$. Thus, $n(A) = m$.

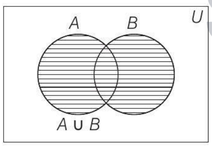
Venn Diagram

The combination of rectangles and circles is called **Venn Euler diagram** or Venn diagram. In Venn diagram, the universal set is represented by a rectangular region and a set is represented by circle on some closed geometrical figure. Where, A is the set and U is the universal set.



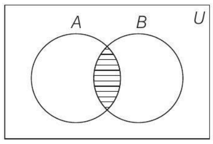
Operations on Sets

- The **union** of sets A and B is the set of all elements which are in set A or in B or in both A and B.
  i.e. $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$



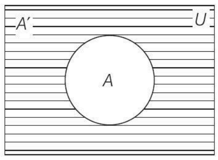
$A \cup B$

- The **intersection** of A and B is the set of all those elements that belong to both A and B.
  i.e. $A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$.

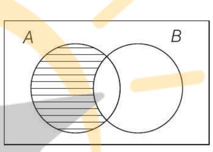


$A \cap B$

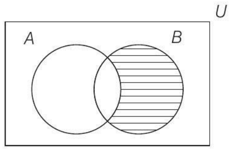
- If $A \cap B = \varphi$, then A and B are called **disjoint sets**.
- Let U be an universal set and A be a set such that $A \subset U$. Then, **complement of A** with respect to U is denoted by A' or A^c or $\overline{A}$ or $U - A$. It is defined as the set of all those elements of U which are not in A.



- The **difference** $A - B$ is the set of all those elements of A which does not belong to B.
  i.e. $A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$
  and $B - A = \{x : x \in B \text{ and } x \notin A\}$.

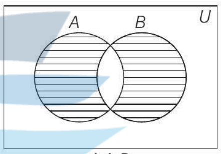


$A - B$



$B - A$

- The symmetric difference of sets A and B is the set $(A - B) \cup (B - A)$ and is denoted by $A \Delta B$.
  i.e. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$



$A \Delta B$

Law of Algebra of Sets

If A, B and C are any three sets, then

1. **Idempotent Laws**
   (i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$
2. **Identity Laws**
   (i) $A \cup \varphi = A$ (ii) $A \cap U = A$
3. **Distributive Laws**
   (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

वेन आरेख उदाहरण

4. मुख्य अवधारणाओं का सारांश

अवधारणा	परिभाषा	प्रतीक
संघ	दोनों समुच्चयों में से किसी एक में स्थित सभी अवयव	$A \cup B$
प्रतिच्छेदन	दोनों समुच्चयों में सामान्य अवयव	$A \cap B$
पूरक	सार्वत्रिक समुच्चय में वे अवयव जो दिए गए समुच्चय में नहीं हैं	$A^{'}, A^{C}$
अंतर	एक समुच्चय में वे अवयव जो दूसरे समुच्चय में नहीं हैं	$A - B$
सममित अंतर	किसी एक समुच्चय में स्थित अवयव परंतु दोनों में नहीं	$A \Delta B$

5. मुख्य सूत्रों का सारांश

- **संघ:**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ या } x \in B\}$$

- **प्रतिच्छेदन:**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ और } x \in B\}$$

- **पूरक:**

$$A^{'} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

- **अंतर:**

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

- **सममित अंतर:**

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

6. निष्कर्ष

समुच्चय सिद्धांत विभिन्न तत्वों के संग्रह के बीच संबंधों को समझने की नींव प्रदान करता है। संघ, प्रतिच्छेदन, पूरक, अंतर, और सममित अंतर जैसी संक्रियाएँ समुच्चय सिद्धांत में आवश्यक उपकरण हैं और गणित, कंप्यूटर विज्ञान एवं तर्कशास्त्र में व्यापक रूप से प्रयुक्त होती हैं।