

अध्याय 12: पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

12.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ:

- पृष्ठीय क्षेत्रफल:** एक 3D वस्तु की सभी सतहों का कुल क्षेत्रफल।
- आयतन:** एक 3D वस्तु द्वारा घेरा गया स्थान।
- ठोसों का संयोजन:** जब दो या अधिक मूल ठोस (जैसे घन, शंकु, बेलन, गोले) आपस में जुड़े होते हैं।
- वास्तविक जीवन के अनुप्रयोग:** पैकेजिंग, वास्तुकला और इंजीनियरिंग में अक्सर संयुक्त आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की गणना शामिल होती है।

महत्वपूर्ण सूत्र (मूल ठोसों के लिए):

ठोस	पृष्ठीय क्षेत्रफल सूत्र	आयतन सूत्र
घन	$6a^2$ (जहाँ a = किनारे की लंबाई)	a^3
घनाभ	$2(lw + lh + wh)$ (जहाँ l, w, h = लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई)	lwh
बेलन	$2\pi r(h + r)$ (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)	$\pi r^2 h$
शंकु	$\pi r(l + r)$ (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
गोला	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
अर्धगोला	$3\pi r^2$ (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)	$\frac{2}{3}\pi r^3$

परीक्षा युक्तियाँ:

- याद रखें:** जब ठोस संयुक्त होते हैं, तो पृष्ठीय क्षेत्रफल की गणना व्यक्तिगत क्षेत्रफलों को जोड़कर लेकिन अतिव्यापी क्षेत्रफलों को घटाकर की जाती है।
- आयतन हमेशा व्यक्तिगत आयतनों का योग होता है (घटाव नहीं)।**
- अभ्यास प्रश्न:** प्रश्न अक्सर संयोजनों जैसे अर्धगोलों वाले बेलन, घन पर शंकु आदि के पृष्ठीय क्षेत्रफल/आयतन खोजने पर होते हैं।

12.2 ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

मुख्य अवधारणाएँ:

- **कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA):** सभी बाहरी सतहों का योग।
- **अतिव्यापी सतहें:** जब दो ठोस जुड़े होते हैं, तो **संपर्क क्षेत्र** को कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में **नहीं गिना जाता।**

उदाहरण 1: दो अर्धगोलों वाला बेलन (कैप्सूल आकार)

- **TSA** = बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल + $2 \times$ अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (लेकिन **अर्धगोलों के आधारों को छोड़कर।**)
- **सूत्र:** $2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2 = 2\pi r(h + 2r)$
- **नोट:** अर्धगोलों के **आधार** आंतरिक हैं और उजागर नहीं होते।

उदाहरण 2: बेलन पर शंकु

- **TSA** = बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल (**शीर्ष आधार को छोड़कर**) + शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल (**आधार को छोड़कर।**)
- **सूत्र:** $2\pi rh + \pi rl$ (जहाँ $l = \sqrt{r^2 + h^2}$)

महत्वपूर्ण बिंदु:

- **चरणबद्ध विधि:**
- संयोजन में व्यक्तिगत ठोसों की पहचान करें।
- उनके व्यक्तिगत पृष्ठीय क्षेत्रफलों की गणना करें।
- अतिव्यापी सतहों के क्षेत्रफलों को घटाएँ।
- **सामान्य गलती:** अतिव्यापी क्षेत्रफलों को घटाना भूल जाना (जैसे बेलन से जुड़े अर्धगोले का आधार)।

SATHEE

परीक्षा-केंद्रित उदाहरण:

1. एक घन के शीर्ष पर गोला रखा गया है। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल की गणना करें।
2. **हल:** घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल + गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (जहाँ वे जुड़े हैं उस आधार को छोड़कर।)
3. एक शंकु एक अर्धगोले से जुड़ा है (आइसक्रीम कोन की तरह)।
4. **TSA** = अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (**आधार को छोड़कर।**) + शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल (**आधार को छोड़कर।**)।

12.3 ठोसों के संयोजन का आयतन

मुख्य अवधारणाएँ:

- **कुल आयतन:** व्यक्तिगत ठोसों के आयतनों का योग।
- **कोई घटाव नहीं:** पृष्ठीय क्षेत्रफल के विपरीत, **अतिव्यापी क्षेत्र आयतन को प्रभावित नहीं करते।**

उदाहरण 1: शंकु वाला बेलन

- कुल आयतन = बेलन का आयतन + शंकु का आयतन।
- सूत्र: $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi r^2 h$

उदाहरण 2: शीर्ष पर अर्धगोला लगा घन

- कुल आयतन = घन का आयतन + अर्धगोले का आयतन।
- सूत्र: $a^3 + \frac{2}{3}\pi r^3$ (जहाँ $a = 2r$)

महत्वपूर्ण बिंदु:

- **चरणबद्ध विधि:**
- व्यक्तिगत ठोसों की पहचान करें।
- उनके व्यक्तिगत आयतनों की गणना करें।
- कुल आयतन प्राप्त करने के लिए उन्हें जोड़ें।
- **सामान्य गलती:** पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन गणनाओं को भ्रमित करना (जैसे आयतन के लिए क्षेत्रफलों को घटाना)।

परीक्षा-केंद्रित उदाहरण:

1. एक **पात्र** बेलन और अर्धगोले को जोड़कर बनाया गया है। इसके आयतन की गणना करें।
2. **हल:** बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन।
3. एक **ठोस** दो घनों को रखकर बनाया गया है। इसका आयतन ज्ञात करें।
4. **हल:** $2a^3$ (जहाँ a प्रत्येक घन के किनारे की लंबाई है)।

12.4 सारांश

SATHEE

मुख्य तथ्य:

- **पृष्ठीय क्षेत्रफल:** व्यक्तिगत क्षेत्रफलों को जोड़ें, अतिव्यापी क्षेत्रफलों को घटाएँ।
- **आयतन:** हमेशा **व्यक्तिगत आयतनों को जोड़ें।**
- **सामान्य आकृतियाँ:** घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोले, अर्धगोले।
- **सूत्र:** सभी मूल सूत्र और उनके संयोजन याद रखें।

सूत्र पुनरावृत्ति:

ठोस	पृष्ठीय क्षेत्रफल	आयतन
घन	$6a^2$	a^3

ठोस	पृष्ठीय क्षेत्रफल	आयतन
घनाभ	$2(lw + lh + wh)$	lwh
बेलन	$2\pi r(h + r)$	$\pi r^2 h$
शंकु	$\pi r(l + r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
गोला	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
अर्धगोला	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$

परीक्षा युक्तियाँ:

- अभ्यास: कैप्सूल, आइसक्रीम कोन, और लंच बॉक्स जैसे संयोजनों पर एनसीईआरटी प्रश्न हल करें।
- आरेख: अतिव्यापी सतहों की पहचान के लिए संयुक्त ठोस को चित्रित करें या स्केच करें।
- मात्रक: उत्तर सही मात्रकों में सुनिश्चित करें (जैसे क्षेत्रफल के लिए cm^2 , आयतन के लिए cm^3)।

{}

किस सूत्र से एक कैप्सूल (दो गोलाद्वारों वाले सिलेंडर) का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल सही ढंग से गणना होती है?

- [x] $2\pi r(h + 2r)$
- [] $2\pi r(h + r)$
- [] $\pi r^2 h + 2\pi r^2$
- [] $2\pi r^2 + 2\pi rh$



शीर्ष पर एक अर्धगोला लगे क्यूब का कुल आयतन क्या है (जहां अर्धगोले का व्यास क्यूब के किनारे के बराबर है)?

- [] $a^3 + \frac{2}{3}\pi r^3$
- [x] $a^3 + \frac{2}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3$
- [] $a^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$
- [] $a^3 + \pi r^3$

जब ठोसों को संयोजित किया जाता है, पृष्ठीय क्षेत्रफल के बारे में कौन सा कथन सत्य है?

1. [] ओवरलैपिंग क्षेत्रों को कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में जोड़ा जाता है।
2. [x] ओवरलैपिंग क्षेत्रों को कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल से घटाया जाता है।
3. [] ओवरलैपिंग क्षेत्रों को 2 से गुणा किया जाता है।
4. [] ओवरलैपिंग क्षेत्रों को नज़रअंदाज किया जाता है।

किस ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $3\pi r^2$ है?

1. [] गोला
2. [] अर्धगोला
3. [x] अर्धगोला (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)
4. [] शंकु (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

एक सिलेंडर से जुड़े शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है (सिलेंडर के आधार और शंकु के आधार को छोड़कर)?

1. [] $2\pi rh + \pi rl$
2. [x] $2\pi rh + \pi rl$
3. [] $\pi r^2 h + \pi rl$
4. [] $\pi r(h + l) + 2\pi r^2$

अर्धगोले के लिए कौन सा सूत्र सही नहीं है?

1. [] कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल: $3\pi r^2$
2. [] आयतन: $\frac{2}{3}\pi r^3$
3. [x] पृष्ठीय क्षेत्रफल: $2\pi r^2$ (आधार को छोड़कर)
4. [] आयतन: $\frac{4}{3}\pi r^3$

SATHEE

यदि एक गोले को एक घन के शीर्ष पर रखा जाता है (गोले का व्यास घन के किनारे के बराबर है), तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है?

1. [] $6a^2 + 4\pi r^2$
2. [x] $6a^2 + 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$
3. [] $6a^2 + \pi r^2$
4. [] $6a^2 + 2\pi r^2$

घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए कौन सा सूत्र सही है?

1. $2(lw + lh + wh)$
2. $2(lw + lh + wh)$
3. lw
4. $2(l + w + h)$

शीर्ष पर एक शंकु वाले सिलेंडर का आयतन क्या है (दोनों का आधार त्रिज्या और ऊँचाई समान है)?

1. $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$
2. $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$
3. $\pi r^2 h + \frac{1}{2}\pi r^2 h$
4. $\pi rh + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

जब ठोसों को संयोजित किया जाता है तो पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के बारे में कौन सा कथन सत्य है?

1. $\boxed{\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल व्यक्तिगत क्षेत्रों का योग होता है, और आयतन व्यक्तिगत आयतनों का योग होता है।}}$
2. $\boxed{\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल ओवरलैपिंग क्षेत्रों को घटाता है, और आयतन व्यक्तिगत आयतनों का योग होता है।}}$
3. $\boxed{\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल व्यक्तिगत क्षेत्रों का योग होता है, और आयतन ओवरलैपिंग आयतनों को घटाता है।}}$
4. $\boxed{\text{पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन दोनों ओवरलैपिंग क्षेत्रों को घटाते हैं।}}$

SATHEE