

## अध्याय 12: पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

### 12.1 परिचय

#### मुख्य अवधारणाएँ:

- **पृष्ठीय क्षेत्रफल:** एक 3D वस्तु की सभी सतहों का कुल क्षेत्रफल।
- **आयतन:** एक 3D वस्तु द्वारा घेरा गया स्थान।
- **ठोसों का संयोजन:** जब दो या अधिक मूल ठोस (जैसे घन, शंकु, बेलन, गोले) आपस में जुड़े होते हैं।
- **वास्तविक जीवन के अनुप्रयोग:** पैकेजिंग, वास्तुकला और इंजीनियरिंग में अक्सर संयुक्त आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन की गणना शामिल होती है।

#### महत्वपूर्ण सूत्र (मूल ठोसों के लिए):

ठोस	पृष्ठीय क्षेत्रफल सूत्र	आयतन सूत्र
घन	$6a^2$ (जहाँ $a$ = किनारे की लंबाई)	$a^3$
घनाभ	$2(lw + lh + wh)$ (जहाँ $l, w, h$ = लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई)	$lwh$
बेलन	$2\pi r(h + r)$ (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)	$\pi r^2 h$
शंकु	$\pi r(l + r)$ (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
गोला	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
अर्धगोला	$3\pi r^2$ (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)	$\frac{2}{3}\pi r^3$

#### परीक्षा युक्तियाँ:

- **याद रखें:** जब ठोस संयुक्त होते हैं, तो पृष्ठीय क्षेत्रफल की गणना व्यक्तिगत क्षेत्रफलों को जोड़कर लेकिन अतिव्यापी क्षेत्रफलों को घटाकर की जाती है।
- **आयतन** हमेशा व्यक्तिगत आयतनों का योग होता है (घटाव नहीं)।
- **अभ्यास प्रश्न:** प्रश्न अक्सर संयोजनों जैसे अर्धगोलों वाले बेलन, घन पर शंकु आदि के पृष्ठीय क्षेत्रफल/आयतन खोजने पर होते हैं।

## 12.2 ठोसों के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

### मुख्य अवधारणाएँ:

- **कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA):** सभी बाहरी सतहों का योग।
- **अतिव्यापी सतहें:** जब दो ठोस जुड़े होते हैं, तो **संपर्क क्षेत्र** को कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में **नहीं** गिना जाता।

### उदाहरण 1: दो अर्धगोलों वाला बेलन (कैप्सूल आकार)

- **TSA** = बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल +  $2 \times$  अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (लेकिन **अर्धगोलों के आधारों को छोड़कर**)।
- **सूत्र:**  $2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2 = 2\pi r(h + 2r)$
- **नोट:** अर्धगोलों के **आधार** आंतरिक हैं और उजागर नहीं होते।

### उदाहरण 2: बेलन पर शंकु

- **TSA** = बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल (शीर्ष आधार को छोड़कर) + शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल (आधार को छोड़कर)।
- **सूत्र:**  $2\pi rh + \pi rl$  (जहाँ  $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ )

### महत्वपूर्ण बिंदु:

- **चरणबद्ध विधि:**
- संयोजन में व्यक्तिगत ठोसों की पहचान करें।
- उनके व्यक्तिगत पृष्ठीय क्षेत्रफलों की गणना करें।
- अतिव्यापी सतहों के क्षेत्रफलों को घटाएँ।
- **सामान्य गलती:** अतिव्यापी क्षेत्रफलों को घटाना भूल जाना (जैसे बेलन से जुड़े अर्धगोले का आधार)।

### परीक्षा-केंद्रित उदाहरण:

1. एक घन के शीर्ष पर गोला रखा गया है। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल की गणना करें।
2. **हल:** घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल + गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (जहाँ वे जुड़े हैं उस आधार को छोड़कर)।
3. एक **शंकु एक अर्धगोले से जुड़ा है** (आइसक्रीम कोन की तरह)।
4. **TSA** = अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल (आधार को छोड़कर) + शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल (आधार को छोड़कर)।

## 12.3 ठोसों के संयोजन का आयतन

### मुख्य अवधारणाएँ:

- **कुल आयतन:** व्यक्तिगत ठोसों के आयतनों का योग।
- **कोई घटाव नहीं:** पृष्ठीय क्षेत्रफल के विपरीत, **अतिव्यापी क्षेत्र आयतन को प्रभावित नहीं करते।**

### उदाहरण 1: शंकु वाला बेलन

- कुल आयतन = बेलन का आयतन + शंकु का आयतन।
- सूत्र:  $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi r^2 h$

### उदाहरण 2: शीर्ष पर अर्धगोला लगा घन

- कुल आयतन = घन का आयतन + अर्धगोले का आयतन।
- सूत्र:  $a^3 + \frac{2}{3}\pi r^3$  (जहाँ  $a = 2r$ )

### महत्वपूर्ण बिंदु:

- चरणबद्ध विधि:
- व्यक्तिगत ठोसों की पहचान करें।
- उनके व्यक्तिगत आयतनों की गणना करें।
- कुल आयतन प्राप्त करने के लिए उन्हें जोड़ें।
- सामान्य गलती: पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन गणनाओं को भ्रमित करना (जैसे आयतन के लिए क्षेत्रफलों को घटाना)।

### परीक्षा-केंद्रित उदाहरण:

1. एक पात्र बेलन और अर्धगोले को जोड़कर बनाया गया है। इसके आयतन की गणना करें।
2. हल: बेलन का आयतन + अर्धगोले का आयतन।
3. एक ठोस दो घनों को रखकर बनाया गया है। इसका आयतन ज्ञात करें।
4. हल:  $2a^3$  (जहाँ  $a$  प्रत्येक घन के किनारे की लंबाई है)।

### 12.4 सारांश

#### मुख्य तथ्य:

- पृष्ठीय क्षेत्रफल: व्यक्तिगत क्षेत्रफलों को जोड़ें, अतिव्यापी क्षेत्रफलों को घटाएँ।
- आयतन: हमेशा व्यक्तिगत आयतनों को जोड़ें।
- सामान्य आकृतियाँ: घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोले, अर्धगोले।
- सूत्र: सभी मूल सूत्र और उनके संयोजन याद रखें।

#### सूत्र पुनरावृत्ति:

ठोस	पृष्ठीय क्षेत्रफल	आयतन
घन	$6a^2$	$a^3$

ठोस	पृष्ठीय क्षेत्रफल	आयतन
घनाभ	$2(lw + lh + wh)$	$lwh$
बेलन	$2\pi r(h + r)$	$\pi r^2 h$
शंकु	$\pi r(l + r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
गोला	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
अर्धगोला	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$

### परीक्षा युक्तियाँ:

- **अभ्यास:** कैप्सूल, आइसक्रीम कोन, और लंच बॉक्स जैसे संयोजनों पर एनसीईआरटी प्रश्न हल करें।
- **आरेख:** अतिव्यापी सतहों की पहचान के लिए संयुक्त ठोस को चित्रित करें या स्केच करें।
- **मात्रक:** उत्तर सही मात्रकों में सुनिश्चित करें (जैसे क्षेत्रफल के लिए  $\text{cm}^2$ , आयतन के लिए  $\text{cm}^3$ )।

{

किस सूत्र से एक कैप्सूल (दो गोलाद्धों वाले सिलेंडर) का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल सही ढंग से गणना होती है?

1. [x]  $2\pi r(h + 2r)$
2. [ ]  $2\pi r(h + r)$
3. [ ]  $\pi r^2 h + 2\pi r^2$
4. [ ]  $2\pi r^2 + 2\pi rh$



शीर्ष पर एक अर्धगोला लगे क्यूब का कुल आयतन क्या है (जहां अर्धगोले का व्यास क्यूब के किनारे के बराबर है)?

1. [ ]  $a^3 + \frac{2}{3}\pi r^3$
2. [x]  $a^3 + \frac{2}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3$
3. [ ]  $a^3 + \frac{4}{3}\pi r^3$
4. [ ]  $a^3 + \pi r^3$

जब ठोसों को संयोजित किया जाता है, पृष्ठीय क्षेत्रफल के बारे में कौन सा कथन सत्य है?

1. ☐ ओवरलैपिंग क्षेत्रों को कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में जोड़ा जाता है।
2. ☒ ओवरलैपिंग क्षेत्रों को कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल से घटाया जाता है।
3. ☐ ओवरलैपिंग क्षेत्रों को 2 से गुणा किया जाता है।
4. ☐ ओवरलैपिंग क्षेत्रों को नज़रअंदाज किया जाता है।

किस ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल  $3\pi r^2$  है?

1. ☐ गोला
2. ☐ अर्धगोला
3. ☒ अर्धगोला (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)
4. ☐ शंकु (कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल)

एक सिलेंडर से जुड़े शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है (सिलेंडर के आधार और शंकु के आधार को छोड़कर)?

1. ☐  $2\pi rh + \pi rl$
2. ☒  $2\pi rh + \pi rl$
3. ☐  $\pi r^2 h + \pi rl$
4. ☐  $\pi r(h + l) + 2\pi r^2$

अर्धगोले के लिए कौन सा सूत्र सही नहीं है?

1. ☐ कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल:  $3\pi r^2$
2. ☐ आयतन:  $\frac{2}{3}\pi r^3$
3. ☒ पृष्ठीय क्षेत्रफल:  $2\pi r^2$  (आधार को छोड़कर)
4. ☐ आयतन:  $\frac{4}{3}\pi r^3$

यदि एक गोले को एक घन के शीर्ष पर रखा जाता है (गोले का व्यास घन के किनारे के बराबर है), तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है?

1. ☐  $6a^2 + 4\pi r^2$
2. ☒  $6a^2 + 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$
3. ☐  $6a^2 + \pi r^2$
4. ☐  $6a^2 + 2\pi r^2$

घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए कौन सा सूत्र सही है?

1. ☐  $2(lw + lh + wh)$
2. ☒  $2(lw + lh + wh)$
3. ☐  $lwh$
4. ☐  $2(l + w + h)$

शीर्ष पर एक शंकु वाले सिलेंडर का आयतन क्या है (दोनों का आधार त्रिज्या और ऊंचाई समान है)?

1. ☐  $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$
2. ☒  $\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$
3. ☐  $\pi r^2 h + \frac{1}{2}\pi r^2 h$
4. ☐  $\pi r h + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

जब ठोसों को संयोजित किया जाता है तो पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन के बारे में कौन सा कथन सत्य है?

1. ☐ पृष्ठीय क्षेत्रफल व्यक्तिगत क्षेत्रों का योग होता है, और आयतन व्यक्तिगत आयतनों का योग होता है।
2. ☒ पृष्ठीय क्षेत्रफल ओवरलैपिंग क्षेत्रों को घटाता है, और आयतन व्यक्तिगत आयतनों का योग होता है।
3. ☐ पृष्ठीय क्षेत्रफल व्यक्तिगत क्षेत्रों का योग होता है, और आयतन ओवरलैपिंग आयतनों को घटाता है।
4. ☐ पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन दोनों ओवरलैपिंग क्षेत्रों को घटाते हैं। {}

SATHEE