13. सांख्यिकी

13.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ:
- **सांख्यिकी**: गणित की वह शाखा जो डेटा को एकत्रित, व्यवस्थित, विश्लेषण और व्याख्या करने से संबंधित है।
- **डेटा के प्रकार**:
- **असमूहीकृत डेटा**: किसी वर्गीकरण के बिना कच्चा डेटा।
- **समूहीकृत डेटा**: वर्ग अंतरालों में व्यवस्थित डेटा (जैसे, 0–10, 10–20)।
- **केंद्रीय प्रवृत्ति**: माप जैसे **माध्य**, **माध्यिका** और **बहुलक** डेटा को सारांशित करने में मदद करते हैं।

परीक्षा सुझाव:
- समूहीकृत और असमूहीकृत डेटा के बीच अंतर को समझें।
- याद रखें कि समूहीकृत डेटा के लिए माध्य, माध्यिका और बहुलक की गणना के लिए विशिष्ट सूत्रों की आवश्यकता होती है।
- वास्तविक जीवन के परिदृश्यों (जैसे ऊँचाई, वजन, आय) से जुड़ी समस्याओं का अभ्यास करें।

उदाहरण:
एक शिक्षक परीक्षा में छात्रों के अंकों को रिकॉर्ड करता है:
असमूहीकृत डेटा: 85, 90, 78, 92, 88
समूहीकृत डेटा: 80–90 (3 छात्र), 90–100 (2 छात्र)

13.2 समूहीकृत डेटा का माध्य

सूत्र:

$$\text{माध्य} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

जहाँ:
- f_i = वर्ग की बारंबारता
- x_i = वर्ग चिह्न (वर्ग अंतराल का मध्यबिंदु)

माध्य की गणना के तरीके:
1. **प्रत्यक्ष विधि**:
- प्रत्येक वर्ग चिह्न को उसकी बारंबारता से गुणा करें।
- गुणनफलों को जोड़ें और कुल बारंबारता से विभाजित करें।

1. **कल्पित माध्य विधि**:
2. एक कल्पित माध्य a चुनें।
3. $d_i = x_i - a$ की गणना करें।
4. सूत्र का प्रयोग करें:

$$\text{माध्य} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$$

5. **पद-विचलन विधि**:
6. एक सामान्य गुणक h (वर्ग चौड़ाई) चुनें।
7. $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ की गणना करें।
8. सूत्र का प्रयोग करें:

$$\text{माध्य} = a + h \cdot \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$$

परीक्षा सुझाव:
- विभिन्न डेटासेट के साथ सभी तीन विधियों का अभ्यास करें।
- बड़े वर्ग अंतरालों (जैसे, 0–100) के लिए **पद-विचलन विधि** का उपयोग करें।
- गणनाओं को प्रत्यक्ष विधि से क्रॉस-चेक करके हमेशा सत्यापित करें।

उदाहरण:
वर्ग अंतराल: 0–10 (3), 10–20 (5), 20–30 (2)
वर्ग चिह्न: 5, 15, 25
माध्य = $\frac{(3\times5) + (5\times15) + (2\times25)}{3+5+2} = \frac{15+75+50}{10} = 14$

13.3 समूहीकृत डेटा का बहुलक

परिभाषा:
बहुलक वह मान है जो डेटासेट में सबसे अधिक बार आता है। समूहीकृत डेटा के लिए, यह **बहुलक वर्ग** होता है (सबसे अधिक बारंबारता वाला वर्ग)।

सूत्र:

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

जहाँ:
- l = बहुलक वर्ग की निचली सीमा
- f_1 = बहुलक वर्ग की बारंबारता
- f_0 = बहुलक वर्ग से पहले के वर्ग की बारंबारता
- f_2 = बहुलक वर्ग के बाद के वर्ग की बारंबारता
- h = वर्ग चौड़ाई

परीक्षा सुझाव:
- पहले बहुलक वर्ग (सबसे अधिक बारंबारता) की पहचान करें।
- याद रखें कि बहुलक **हमेशा अद्वितीय नहीं** होता है (द्विबहुलक या बहुबहुलक डेटासेट)।
- सूत्र का प्रयोग केवल समूहीकृत डेटा के लिए करें; असमूहीकृत डेटा के लिए सीधे बारंबारताओं को गिनें।

उदाहरण:
वर्ग अंतराल: 0–10 (3), 10–20 (5), 20–30 (2)
बहुलक वर्ग = 10–20 (बारंबारता = 5)
बहुलक = $10 + \left(\frac{5-3}{2\times5-3-2}\right)\times10 = 10 + \left(\frac{2}{5}\right)\times10 = 14$

13.4 समूहीकृत डेटा की माध्यिका

परिभाषा:
माध्यिका क्रम में व्यवस्थित डेटासेट का मध्य मान होता है। समूहीकृत डेटा के लिए, इसकी गणना **माध्यिका वर्ग** का उपयोग करके की जाती है (वह वर्ग जहाँ संचयी बारंबारता $\frac{n}{2}$ से अधिक हो जाती है)।

सूत्र:

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

जहाँ:
- l = माध्यिका वर्ग की निचली सीमा
- n = कुल प्रेक्षणों की संख्या
- cf = माध्यिका वर्ग से पहले के वर्ग की संचयी बारंबारता
- f = माध्यिका वर्ग की बारंबारता
- h = वर्ग चौड़ाई

परीक्षा सुझाव:
- पहले $\frac{n}{2}$ का उपयोग करके माध्यिका वर्ग ढूँढें।
- उन समस्याओं का अभ्यास करें जहाँ वर्ग अंतराल समान नहीं हैं।
- याद रखें कि माध्यिका डेटा को दो बराबर भागों में विभाजित करती है।

उदाहरण:
वर्ग अंतराल: 0–10 (3), 10–20 (5), 20–30 (2)
कुल $n = 10$, इसलिए माध्यिका वर्ग = 10–20 (संचयी बारंबारता = 3 + 5 = 8 > 5)
माध्यिका = $10 + \left(\frac{5-3}{5}\right) \times 10 = 10 + 4 = 14$

13.5 सारांश

मुख्य सूत्र:
1. **माध्य**:
- प्रत्यक्ष: $\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$
- कल्पित माध्य: $a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$
- पद-विचलन: $a + h \cdot \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}$

1. **माध्यिका**:
$$l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$
2. **बहुलक**:
$$l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

महत्वपूर्ण बिंदु:
- **माध्य** चरम मानों के प्रति संवेदनशील होता है।
- **माध्यिका** आउटलायर्स के प्रति प्रतिरोधी होती है।
- **बहुलक** श्रेणीबद्ध डेटा के लिए सर्वोत्तम होता है।
- सूत्रों को लागू करने से पहले हमेशा जांचें कि डेटा समूहीकृत है या असमूहीकृत।

परीक्षा सुझाव:
- NCERT अभ्यासों (जैसे, प्र. 2–5, अध्याय 14) का अभ्यास करें।
- सूत्रों और उनके घटकों को याद करें।
- माध्यिका/बहुलक वर्गों को स्थित करने के लिए संचयी बारंबारता के लिए आरेखों का उपयोग करें।

{}

निम्नलिखित में से कौन सांख्यिकी की सबसे अच्छी परिभाषा है?

1. [x] डेटा को एकत्रित, व्यवस्थित, विश्लेषण और व्याख्या करने से संबंधित गणित की एक शाखा
2. [ ] बीजगणितीय समीकरणों को हल करने की एक विधि
3. [ ] वक्रों के नीचे के क्षेत्रों की गणना करने की एक तकनीक
4. [ ] जीवित जीवों को वर्गीकृत करने की एक प्रणाली

निम्नलिखित में से कौन सा सामग्री में उल्लिखित डेटा का प्रकार नहीं है?

1. [ ] असमूहीकृत डेटा
2. [ ] समूहीकृत डेटा
3. [ ] श्रेणीबद्ध डेटा
4. [x] मात्रात्मक डेटा

बड़े वर्ग अंतराल वाले समूहीकृत डेटा के माध्य की गणना के लिए कौन सी विधि सबसे उपयुक्त है?

1. [ ] प्रत्यक्ष विधि
2. [ ] कल्पित माध्य विधि
3. [x] पद-विचलन विधि
4. [ ] माध्यिका गणना विधि

समूहीकृत डेटा के बहुलक का सूत्र क्या है?

1. [ ] $l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$
2. [ ] $\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$
3. [ ] $l+\left(\frac{\frac{n}{2}-cf}{f}\right)\times h$
4. [x] $\text{Mean}=a+\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

समूहीकृत डेटा के लिए, कौन सा माप माध्यिका वर्ग द्वारा निर्धारित किया जाता है?

1. [x] माध्यिका
2. [ ] बहुलक
3. [ ] माध्य
4. [ ] परिसर

समूहीकृत डेटा की माध्यिका के बारे में निम्नलिखित में से कौन सा सत्य है?

1. [ ] इसकी गणना बहुलक सूत्र का उपयोग करके की जाती है
2. [x] इसके लिए उस वर्ग की पहचान करनी होती है जहां संचयी बारंबारता $\frac{n}{2}$ से अधिक हो जाती है
3. [ ] यह हमेशा माध्य के बराबर होती है
4. [ ] यह चरम मानों से अप्रभावित रहती है

दिए गए उदाहरण में, बहुलक की गणना के लिए किस सूत्र का उपयोग किया गया था?

1. [ ] माध्य के लिए प्रत्यक्ष विधि
2. [x] $l+\left(\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right)\times h$
3. [ ] माध्य के लिए पद-विचलन विधि
4. [ ] माध्यिका वर्ग सूत्र

सारांश में किस माप को "आउटलायर्स के प्रति प्रतिरोधी" बताया गया है?

1. [ ] माध्य
2. [x] माध्यिका
3. [ ] बहुलक
4. [ ] परिसर

बड़े वर्ग अंतरालों के लिए पद-विचलन विधि को क्यों प्राथमिकता दी जाती है?

1. [ ] यह विचलनों के आकार को कम करके गणनाओं को सरल बनाती है
2. [x] यह प्रत्यक्ष विधि में बड़ी संख्याओं से निपटने से बचती है
3. [ ] यह सुनिश्चित करती है कि परिणाम हमेशा एक पूर्णांक हो
4. [ ] यह वर्ग चिह्नों की आवश्यकता को समाप्त कर देती है

समूहीकृत बनाम असमूहीकृत डेटा के बारे में निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही है?

1. [ ] असमूहीकृत डेटा हमेशा समूहीकृत डेटा से अधिक सटीक होता है
2. [x] समूहीकृत डेटा के लिए केंद्रीय प्रवृत्ति के मापों के लिए विशिष्ट सूत्रों की आवश्यकता होती है
3. [ ] असमूहीकृत डेटा का उपयोग माध्यिका की गणना के लिए नहीं किया जा सकता
4. [ ] समूहीकृत डेटा का विश्लेषण करना हमेशा असमूहीकृत डेटा की तुलना में आसान होता है {}