अध्याय 9: त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

9.1 ऊँचाइयाँ और दूरियाँ

मुख्य अवधारणाएँ

- **त्रिकोणमिति** का उपयोग **ऊँचाइयों और दूरियों** से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए किया जाता है जब प्रत्यक्ष माप संभव नहीं होता।
- **समकोण त्रिभुज** इन अनुप्रयोगों का आधार हैं।
- **उन्नयन कोण**: पर्यवेक्षक की क्षैतिज रेखा और क्षैतिज स्तर से **ऊपर** स्थित वस्तु की दृष्टि रेखा के बीच का कोण।
- **अवनति कोण**: पर्यवेक्षक की क्षैतिज रेखा और क्षैतिज स्तर से **नीचे** स्थित वस्तु की दृष्टि रेखा के बीच का कोण।
- **दृष्टि रेखा**: पर्यवेक्षक की आँख से देखी जा रही वस्तु तक की सीधी रेखा।

महत्वपूर्ण सूत्र

- **त्रिकोणमितीय अनुपात**:

$$\sin\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}, \quad \cos\theta = \frac{\text{संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}}, \quad \tan\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{संलग्न भुजा}}$$

- **संबंध**:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

आरेख और उनका महत्व

1. **उन्नयन कोण का आरेख**:
2. एक समकोण त्रिभुज जिसमें पर्यवेक्षक बिंदु A पर है, वस्तु बिंदु B पर है, और A से क्षैतिज रेखा आधार है।
3. **उन्नयन कोण** बिंदु A पर, क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा AB के बीच स्थित है।
4. **उदाहरण**: एक ज्ञात दूरी से उन्नयन कोण का उपयोग करके पेड़ की ऊँचाई की गणना करना।
5. **अवनति कोण का आरेख**:
6. एक समकोण त्रिभुज जिसमें पर्यवेक्षक उच्च स्थान पर है (जैसे इमारत) और वस्तु नीचे है।
7. **अवनति कोण** पर्यवेक्षक की आँख पर, क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच स्थित है।
8. **उदाहरण**: अवनति कोण का उपयोग करके एक नाव से प्रकाशस्तंभ की दूरी ज्ञात करना।

© 2023-2025 Copyright SATHEE

समस्याएँ हल करने के चरण

1. समस्या को दृष्टिगत रूप से समझने के लिए **एक आरेख बनाएँ**।
2. **ज्ञात मात्राओं को लेबल करें** (जैसे कोण, भुजाएँ)।
3. **अज्ञात मात्रा की पहचान करें** (जैसे ऊँचाई, दूरी)।
4. दी गई जानकारी के आधार पर **उपयुक्त त्रिकोणमितीय अनुपात चुनें**।
5. **एक समीकरण स्थापित करें** और अज्ञात के लिए हल करें।

उदाहरण समस्याएँ

उदाहरण 1:
एक व्यक्ति एक पेड़ से 20 मीटर की दूरी पर खड़ा है। पेड़ की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- **हल**:

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{पेड़ की ऊँचाई}}{20} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{20} \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3}} \approx 11.55 \text{ मी}$$

उदाहरण 2:
60 मीटर ऊँची इमारत के शीर्ष से एक कार का अवनति कोण 45° है। कार और इमारत के आधार के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
- **हल**:
- अवनति कोण = 45°, अतः कार से इमारत तक का उन्नयन कोण भी 45° है।
-

$$\tan 45^\circ = \frac{60}{\text{दूरी}} \Rightarrow 1 = \frac{60}{d} \Rightarrow d = 60 \text{ मी}$$

SATHEE

परीक्षा युक्तियाँ

- समस्या का प्रतिनिधित्व करने के लिए **हमेशा आरेख बनाएँ**।
- **याद रखें कि उन्नयन और अवनति कोण बराबर होते हैं** जब एक ही क्षैतिज रेखा पर दो बिंदुओं से मापे जाते हैं।
- मानक कोणों (जैसे 30°, 45°, 60°) के लिए अनुमानित दशमलव के बजाय **सटीक मानों का उपयोग करें**।
- दो त्रिभुजों को संयोजित करने या पूरक कोणों का उपयोग करने जैसी **कई चरणों वाली समस्याओं का अभ्यास करें**।

© 2023-2025 Copyright SATHEE

9.2 सारांश

मुख्य बिंदु

- **त्रिकोणमिति ऊँचाइयों और दूरियों** से संबंधित वास्तविक दुनिया की समस्याओं को हल करने में मदद करती है।
- **उन्नयन/अवनति कोण** अज्ञात ऊँचाइयों या दूरियों का निर्धारण करने के लिए महत्वपूर्ण हैं।
- **समकोण त्रिभुज** त्रिकोणमितीय अनुपातों को लागू करने के लिए आवश्यक हैं।
- **सूत्र** जैसे $\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख}}{\text{संलग्न}}$ भुजाओं और कोणों को संबंधित करने के लिए उपयोग किए जाते हैं।

महत्वपूर्ण नोट्स

- **हमेशा मान लें** कि जमीन क्षैतिज है जब तक कि अन्यथा न कहा गया हो।
- हल करने से पहले **गुम जानकारी की जाँच करें** (जैसे लापता भुजाएँ या कोण)।
- गैर-मानक कोणों (जैसे 15°, 75°) के लिए **कैलकुलेटर का उपयोग करें** लेकिन **अंतिम उत्तर तक राउंडिंग से बचें**।

सूत्र पुनरावृत्ति

- $\sin\theta = \frac{\text{सम्मुख}}{\text{कर्ण}}$
- $\cos\theta = \frac{\text{संलग्न}}{\text{कर्ण}}$
- $\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख}}{\text{संलग्न}}$
- $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
- $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
- $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

{}

निम्नलिखित में से कौन सा उन्नयन कोण को सही ढंग से परिभाषित करता है?

1. [x] पर्यवेक्षक से क्षैतिज रेखा और क्षैतिज स्तर से ऊपर किसी वस्तु की दृष्टि रेखा के बीच का कोण।
2. [ ] पर्यवेक्षक से ऊर्ध्वाधर रेखा और क्षैतिज स्तर से नीचे किसी वस्तु की दृष्टि रेखा के बीच का कोण।
3. [ ] पर्यवेक्षक से दृष्टि रेखा और ऊर्ध्वाधर रेखा के बीच का कोण।
4. [ ] दृष्टि रेखा और जमीन के बीच का कोण।

© 2023-2025 Copyright SATHEE

एक समकोण त्रिभुज में, किस त्रिकोणमितीय अनुपात का उपयोग सम्मुख भुजा और कर्ण को संबंधित करने के लिए किया जाता है?

1. [ ] स्पर्शज्या
2. [x] ज्या
3. [ ] कोटिस्पर्शज्या
4. [ ] छेदक

यदि एक बिंदु से मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण 30° है और क्षैतिज दूरी 20 मीटर है, तो मीनार की ऊँचाई क्या है?

1. [ ] 10√3 मी
2. [x] 20/√3 मी
3. [ ] 20√3 मी
4. [ ] 10 मी

जब एक इमारत से कार का अवनति कोण 45° होता है, तो इमारत की ऊँचाई और कार से क्षैतिज दूरी के बीच क्या संबंध है?

1. [ ] ऊँचाई दूरी से अधिक होती है।
2. [x] ऊँचाई दूरी के बराबर होती है।
3. [ ] ऊँचाई दूरी की आधी होती है।
4. [ ] ऊँचाई दूरी से दोगुनी होती है।

निम्नलिखित में से कौन सा मानक त्रिकोणमितीय सर्वसमिका नहीं है?

1. [ ] tan θ = sin θ / cos θ
2. [x] cot θ = tan θ
3. [ ] sec θ = 1 / cos θ
4. [ ] csc θ = 1 / sin θ

उदाहरण में जहाँ एक व्यक्ति पेड़ से 20 मीटर दूर है और उन्नयन कोण 30° है, ऊँचाई की गणना के लिए किस सूत्र का उपयोग किया जाता है?

1. [ ] sin θ = सम्मुख / कर्ण
2. [x] tan θ = सम्मुख / संलग्न
3. [ ] cos θ = संलग्न / कर्ण
4. [ ] cot θ = संलग्न / सम्मुख

© 2023-2025 Copyright SATHEE

यदि दो पर्यवेक्षक एक ही क्षैतिज रेखा पर हैं, तो उन्नयन और अवनति कोणों के बारे में क्या सत्य है?

1. [ ] वे हमेशा पूरक होते हैं।
2. [x] यदि वस्तुएं एक ही ऊँचाई पर हैं तो वे बराबर होते हैं।
3. [ ] वे संपूरक होते हैं।
4. [ ] वे हमेशा 90° होते हैं।

कौन सा चित्र अवनति कोण को सबसे अच्छी तरह दर्शाता है?

1. [ ] आधार पर पर्यवेक्षक के साथ एक त्रिभुज, ऊपर वस्तु और आधार पर कोण।
2. [x] उच्च बिंदु पर पर्यवेक्षक के साथ एक त्रिभुज, नीचे वस्तु और पर्यवेक्षक पर कोण।
3. [ ] आधार पर पर्यवेक्षक के साथ एक त्रिभुज, नीचे वस्तु और आधार पर कोण।
4. [ ] आधार पर पर्यवेक्षक के साथ एक त्रिभुज, बगल में वस्तु और आधार पर कोण।

त्रिकोणमिति समस्याओं में चित्र बनाने का प्राथमिक उद्देश्य क्या है?

1. [ ] कर्ण की सीधे गणना करना।
2. [x] समस्या को दृष्टिगत रूप से समझना और ज्ञात व अज्ञात मात्राओं की पहचान करना।
3. [ ] त्रिकोणमितीय अनुपातों का उपयोग न करना।
4. [ ] यह सुनिश्चित करना कि कोण रेडियन में मापा जाए।

निम्नलिखित में से कौन सा मानक कोणों के सटीक मानों का सही उपयोग है?

1. [ ] sin 45° = √3/2
2. [x] tan 60° = √3
3. [ ] cos 30° = 1/2
4. [ ] cot 45° = 2/√3

   {}

© 2023-2025 Copyright SATHEE