अध्याय 1: वास्तविक संख्याएँ

1.1 परिचय

प्रमुख अवधारणाएँ

- **वास्तविक संख्याएँ**: सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय।
- **परिमेय संख्याएँ**: वे संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं, $q \neq 0$.
  - उदाहरण: $\frac{1}{2}, 0.333..., -5$.
- **अपरिमेय संख्याएँ**: वे संख्याएँ जिन्हें **नहीं** व्यक्त किया जा सकता है $\frac{p}{q}$ के रूप में।
  - उदाहरण: $\sqrt{2}, \pi, e$.

वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म

1. **संवरक गुणधर्म**:
2. वास्तविक संख्याओं का जोड़, घटाव, गुणन और भाजन (शून्य से भाजन को छोड़कर) हमेशा एक वास्तविक संख्या देता है।
3. **क्रमविनिमेय गुणधर्म**:
4. $a + b = b + a$, $a \times b = b \times a$.
5. **साहचर्य गुणधर्म**:
6. $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
7. **वितरण गुणधर्म**:
8. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

दशमलव निरूपण

- **सांत दशमलव**: परिमेय संख्याएँ जिनमें दशमलव स्थान सीमित होते हैं (उदाहरण: 0.5).
- **असांत दशमलव**:
- **आवर्ती**: परिमेय संख्याएँ जिनमें दशमलव पुनरावृत्त होते हैं (उदाहरण: $0.\overline{3}$).
- **अनावर्ती**: अपरिमेय संख्याएँ (उदाहरण: π).

परीक्षा युक्तियाँ

- परिमेय और अपरिमेय संख्याओं में भेद करने पर ध्यान केंद्रित करें।
- भिन्नों को दशमलव में और दशमलव को भिन्नों में परिवर्तित करने का अभ्यास करें।
- समस्या-समाधान के लिए संवरक और वितरण गुणधर्मों को समझें।

1.2 अंकगणित का मौलिक प्रमेय

प्रमुख अवधारणाएँ

- **अभाज्य संख्याएँ**: वे संख्याएँ जो 1 से बड़ी होती हैं और जिनके केवल दो गुणनखंड होते हैं: 1 और स्वयं संख्या (उदाहरण: 2, 3, 5).
- **यौगिक संख्याएँ**: वे संख्याएँ जिनके दो से अधिक गुणनखंड होते हैं (उदाहरण: 4, 6, 8).
- **अभाज्य गुणनखंडन**: किसी यौगिक संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त करना।
- उदाहरण: $36 = 2\times2\times3\times3 = 2^2\times3^2$.

अंकगणित का मौलिक प्रमेय

- **कथन**: प्रत्येक यौगिक संख्या को, गुणनखंडों के क्रम की परवाह किए बिना, अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में **अद्वितीय** तरीके से व्यक्त किया जा सकता है।

प्रयोग

1. **महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करना**:
2. **अभाज्य गुणनखंडन** का उपयोग करके उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों को पहचानें।
3. उदाहरण: $\mathrm{HCF}(12, 18) = 2\times3 = 6$.
4. **लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) ज्ञात करना**:
5. **अभाज्य गुणनखंडन** का उपयोग करके सभी अभाज्यों की उच्चतम घातें लें।
6. सूत्र: $\mathrm{HCF}\times\mathrm{LCM} =$ दोनों संख्याओं का गुणनफल.

परीक्षा युक्तियाँ

- 100 तक की संख्याओं के लिए अभाज्य गुणनखंडन का अभ्यास करें।
- सूत्र $\mathrm{HCF}\times\mathrm{LCM} = a\times b$ को याद रखें।
- अभाज्य गुणनखंडन की अद्वितीयता के प्रमाण के लिए तैयार रहें।

1.3 अपरिमेय संख्याओं का पुनर्विलोकन

प्रमुख अवधारणाएँ

- **अपरिमेय संख्याएँ**: $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकतीं, इनके दशमलव अनवसानी और अनावर्ती होते हैं।
- **अपरिमेयता का प्रमाण**: **विरोधाभास द्वारा उपपत्ति** का उपयोग करें।

$\sqrt{2}$ के अपरिमेय होने का प्रमाण

1. मान लीजिए $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, जहाँ p और q सह-अभाज्य पूर्णांक हैं।
2. दोनों पक्षों का वर्ग करें: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$.
3. इसका अर्थ है p^2 सम है $\Rightarrow p$ सम है। मान लीजिए $p = 2k$.
4. प्रतिस्थापित करें: $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$.
5. इस प्रकार, q^2 सम है $\Rightarrow q$ सम है।
6. विरोधाभास: p और q दोनों सम हैं, जो सह-अभाज्यता की धारणा का उल्लंघन करता है।
7. **निष्कर्ष**: $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्म

- **योगफल**:
- परिमेय + परिमेय = परिमेय।
- परिमेय + अपरिमेय = अपरिमेय।
- **गुणनफल**:
- परिमेय × परिमेय = परिमेय।
- परिमेय × अपरिमेय = अपरिमेय।
- **दो अपरिमेय संख्याओं का योग या गुणनफल**: परिमेय या अपरिमेय हो सकता है (उदाहरण: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$).

परीक्षा युक्तियाँ

- $\sqrt{2}$ के प्रमाण में निपुण हों और इसे गैर-वर्ग पूर्णांकों के लिए $\sqrt{n}$ तक विस्तृत करें।
- वास्तविक दुनिया के संदर्भों (जैसे ज्यामिति) में अपरिमेय संख्याओं के प्रभाव को समझें।
- परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के योग व गुणन से जुड़ी समस्याओं का अभ्यास करें।

1.4 सारांश

- **वास्तविक संख्याएँ**: सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित करती हैं।
- **अंकगणित का मौलिक प्रमेय**: प्रत्येक यौगिक संख्या का एक अद्वितीय अभाज्य गुणनखंडन होता है।
- **अपरिमेय संख्याएँ**: अनवसानी, अनावर्ती दशमलव होते हैं; उदाहरणों में $\sqrt{2}, \pi$ शामिल हैं।
- **मुख्य सूत्र**:
- $\text{HCF} \times \text{LCM} = a \times b$.
- HCF/LCM सरल बनाने के लिए अभाज्य गुणनखंडन।
- **महत्वपूर्ण प्रमेय**:
- अपरिमेयता का प्रमाण (जैसे $\sqrt{2}$).
- योग/गुणन के अंतर्गत परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के गुणधर्म।

{}

निम्नलिखित में से कौन सी वास्तविक संख्याओं की सही परिभाषा है?

1. [x] सभी परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय।
2. [ ] वे संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
3. [ ] वे संख्याएँ जिनके दशमलव अनवसानी और अनावर्ती होते हैं।
4. [ ] वे संख्याएँ जो केवल पूर्णांक होती हैं।

निम्नलिखित में से कौन सा एक अपरिमेय संख्या का उदाहरण है?

1. [ ] $\frac{1}{3}$
2. [ ] $0.333...$
3. [x] $\sqrt{2}$
4. [ ] -7

कौन सा गुण बताता है कि $a + (b + c) = (a + b) + c$?

1. [ ] संवरक गुण
2. [ ] क्रमविनिमेय गुण
3. [x] साहचर्य गुण
4. [ ] वितरण गुण

कौन सा दशमलव निरूपण एक अनवसानी, अनावर्ती दशमलव से संगत होता है?

1. [ ] 0.5
2. [ ] $0.\overline{6}$
3. [ ] $0.101001000...$
4. [x] π

36 का अभाज्य गुणनखंड क्या है?

1. [ ] $2\times3\times6$
2. [ ] $2^2\times3$
3. [x] $2^2\times3^2$
4. [ ] 2×3^3

यदि $\mathrm{HCF}(a, b) = 2$ और $\mathrm{LCM}(a, b) = 12$, तो $a \times b$ क्या होगा?

1. [ ] 4
2. [x] 24
3. [ ] 6
4. [ ] 8

$\sqrt{2}$ के अपरिमेय होने को सिद्ध करने के लिए किस विधि का प्रयोग किया जाता है?

1. [ ] प्रत्यक्ष उपपत्ति
2. [ ] आगमनात्मक उपपत्ति
3. [ ] विरोधाभास
4. [x] विरोधाभास द्वारा उपपत्ति

एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या को जोड़ने का परिणाम क्या होता है?

1. [ ] सदैव परिमेय
2. [ ] सदैव अपरिमेय
3. [x] अपरिमेय
4. [ ] कभी परिमेय, कभी अपरिमेय

अभाज्य गुणनखंडन का कौन सा एक विशिष्ट गुण है?

1. [ ] इसे कई तरीकों से किया जा सकता है।
2. [x] यह गुणनखंडों के क्रम तक अद्वितीय होता है।
3. [ ] यह केवल सम संख्याओं पर लागू होता है।
4. [ ] इसमें पूर्णांकेतर गुणनखंड सम्मिलित होते हैं।

दो अपरिमेय संख्याओं के योग के बारे में निम्नलिखित में से कौन सा सही है?

1. [ ] यह सदैव परिमेय होता है।
2. [ ] यह सदैव अपरिमेय होता है।
3. [x] यह परिमेय या अपरिमेय हो सकता है।
4. [ ] यह कभी शून्य नहीं हो सकता। {}