

अध्याय 4: द्विघात समीकरण

4.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ

- एक **द्विघात समीकरण**, $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप का समीकरण होता है जहाँ $a \neq 0$ ।
- यह एक चर (x) में **द्वितीय डिग्री बहुपद समीकरण** है।
- द्विघात समीकरण वास्तविक जीवन के परिदृश्यों जैसे क्षेत्रफल गणना, प्रक्षेप्य गति और लाभ/हानि समस्याओं में उत्पन्न होते हैं।

महत्वपूर्ण बिंदु

- द्विघात समीकरण की **घात 2** होती है, जो चर की उच्चतम घात है।
- इस समीकरण को **द्विघात** कहा जाता है क्योंकि "quad" का अर्थ वर्ग होता है (लैटिन *quadratus* से)।

परीक्षा सुझाव

- द्विघात समीकरण का **मानक रूप** समझें।
- ध्यान दें कि द्विघात समीकरणों का उपयोग वास्तविक विश्व की समस्याओं के मॉडल बनाने में किया जाता है।

4.2 द्विघात समीकरण

परिभाषा और मानक रूप

- एक चर x में एक **द्विघात समीकरण** वह समीकरण होता है जिसे $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ:
- a , b , और c स्थिरांक हैं ($a \neq 0$)।
- x चर है।
- a , x^2 का गुणांक है, b , x का गुणांक है, और c , स्थिर पद है।

उदाहरण

- $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow a = 1, b = 5, c = 6$
- $3x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow a = 3, b = -2, c = 1$

परीक्षा सुझाव

- दिए गए समीकरण से गुणांक a , b , और c की पहचान करें।
- याद रखें कि $a \neq 0$ समीकरण के द्विघात होने के लिए एक आवश्यक शर्त है।

4.3 गुणनखंड विधि द्वारा द्विघात समीकरण का हल

गुणनखंड विधि से हल करने के चरण

1. समीकरण को मानक रूप में लिखें ($ax^2 + bx + c = 0$)।
2. मध्य पद (bx) को ऐसे दो पदों में विभाजित करें कि उनके गुणांकों का गुणनफल $a \times c$ के बराबर हो।
3. पदों को द्विपदों में समूहित करके गुणनखंड करें।
4. प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर सेट करें और x के लिए हल करें।

उदाहरण

समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ को हल करें:

1. मध्य पद को विभाजित करें: $x^2 + 2x + 3x + 6 = 0$
2. समूह बनाएँ: $(x^2 + 2x) + (3x + 6) = 0$
3. गुणनखंड करें: $x(x + 2) + 3(x + 2) = 0$
4. संयोजित करें: $(x + 2)(x + 3) = 0$
5. हल: $x = -2$ या $x = -3$

महत्वपूर्ण टिप्पणियाँ

- गुणनखंड विधि तभी कार्य करती है जब द्विघात समीकरण को पूर्णांक गुणांक वाले दो द्विपदों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सके।
- यदि गुणनखंड संभव न हो, तो द्विघात सूत्र या वर्ग पूर्ण करने की विधि का उपयोग करें।

परीक्षा सुझाव

- ऐसे समीकरणों पर गुणनखंड विधि का अभ्यास करें जहाँ गुणनफल $a \times c$ को विभाजित करना आसान हो।
- हलों की जाँच करने के लिए उन्हें मूल समीकरण में प्रतिस्थापित करें।

4.4 मूलों की प्रकृति

विविक्तकर और इसकी भूमिका

- द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर निम्न प्रकार दिया जाता है:
 $D = b^2 - 4ac$
- मूलों की प्रकृति D के मान पर निर्भर करती है:
- $D > 0$: दो भिन्न वास्तविक मूल।
- $D = 0$: एक वास्तविक मूल (द्विगुणित मूल)।
- $D < 0$: कोई वास्तविक मूल नहीं (मूल काल्पनिक होते हैं)।

उदाहरण

1. $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow D = (-4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0 \rightarrow$ एक वास्तविक मूल ($x = 2$)।
2. $x^2 + 2x + 5 = 0 \rightarrow D = (2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 \rightarrow$ कोई वास्तविक मूल नहीं।

परीक्षा सुझाव

- **विविक्तकर सूत्र** ($D = b^2 - 4ac$) को याद रखें।
- समीकरण को हल किए बिना ही विविक्तकर का उपयोग करके मूलों की प्रकृति जानें।
- यदि **D एक पूर्ण वर्ग** है, तो मूल **परिमेय** होते हैं; अन्यथा वे **अपरिमेय** होते हैं।

4.5 सारांश

- एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) के रूप में होता है।
- **गुणनखंड विधि** द्विघात समीकरणों को हल करने का एक तरीका है, जब यह संभव हो।
- **विविक्तकर** ($D = b^2 - 4ac$) मूलों की प्रकृति निर्धारित करता है:
- **$D > 0$** : दो भिन्न वास्तविक मूल।
- **$D = 0$** : एक वास्तविक मूल (द्विगुणित)।
- **$D < 0$** : कोई वास्तविक मूल नहीं।
- हलों का सदैव प्रतिस्थापन द्वारा सत्यापन करें।

याद रखने योग्य महत्वपूर्ण सूत्र

- मानक रूप: $ax^2 + bx + c = 0$
- विविक्तकर: $D = b^2 - 4ac$
- मूल: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (द्विघात सूत्र से प्राप्त)

परीक्षा की तैयारी चेकलिस्ट

- गुणनखंड विधि द्वारा समीकरणों को हल करने का अभ्यास करें।
- विविक्तकर का उपयोग करके मूलों की प्रकृति से संबंधित प्रश्न हल करें।
- मानक रूप और विविक्तकर सूत्र को याद करें।
- दिए गए समीकरणों में गुणांक **a**, **b**, और **c** की पहचान करने पर ध्यान दें।

}

निम्नलिखित में से कौन सा द्विघात समीकरण का मानक रूप है?

1. $[x] ax^2 + bx + c = 0$ (जहाँ $a \neq 0$)
2. $[] ax + b = 0$
3. $[] ax^3 + bx^2 + c = 0$
4. $[] a^2x + b = 0$

द्विघात समीकरण की घात क्या होती है?

- ☐ 1
- ☒ 2
- ☐ 3
- ☐ 0

विविक्तकर $D = b^2 - 4ac$ क्या निर्धारित करता है?

- ☐ मूलों का योग
- ☐ मूलों का गुणनफल
- ☒ मूलों की प्रकृति
- ☐ समीकरण का आलेख

यदि विविक्तकर $D > 0$ है, तो द्विघात समीकरण के मूल किस प्रकार के होते हैं?

- ☐ कोई वास्तविक मूल नहीं
- ☐ एक वास्तविक मूल
- ☒ दो भिन्न वास्तविक मूल
- ☐ दो समान वास्तविक मूल

द्विघात समीकरण को गुणनखंड विधि से हल करने में कौन सा चरण शामिल नहीं है?

- ☐ मध्य पद को विभक्त करना
- ☐ समूह बनाकर गुणनखंड करना
- ☒ द्विघात सूत्र का प्रयोग करना
- ☐ प्रत्येक गुणनखंड को शून्य के बराबर सेट करना

निम्नलिखित में से कौन सा समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है?

- ☐ $3x^2 - 2x + 1 = 0$
- ☐ $x^2 + 5x + 6 = 0$
- ☐ $2x + 3 = 0$
- ☒ $x^3 + 2x^2 + x = 0$

समीकरण $x^2 - 4x + 4 = 0$ के लिए विविक्तकर क्या है?

1. [] 16
2. [] 0
3. [x] 8
4. [] -8

द्विघात समीकरण के मूलों का सही सूत्र क्या है?

1. [] $x = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$
2. [x] $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
3. [] $x = \frac{b \pm \sqrt{D}}{a}$
4. [] $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a}$

द्विघात समीकरणों में प्रतिस्थापन द्वारा समाधानों की जाँच करना क्यों महत्वपूर्ण है?

1. [] समीकरण को सरल बनाने के लिए
2. [x] समाधानों की शुद्धता सत्यापित करने के लिए
3. [] विविक्तकर ज्ञात करने के लिए
4. [] गुणांकों की पहचान करने के लिए

यदि विविक्तकर $D < 0$ है, तो मूलों के बारे में क्या कहा जा सकता है?

1. [] वे दो भिन्न वास्तविक मूल हैं
2. [] वे एक वास्तविक मूल हैं
3. [x] वे कोई वास्तविक मूल नहीं हैं (काल्पनिक)
4. [] वे दो समान वास्तविक मूल हैं { }

