अध्याय 2: बहुपद

2.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ:
- **बहुपद**: चर और गुणांकों वाला एक बीजगणितीय व्यंजक, जिसमें केवल जोड़, घटाव, गुणा और चरों के गैर-ऋणात्मक पूर्णांक घातांक संक्रियाएँ शामिल हों।
- उदाहरण: $3x^2 + 2x - 5$ एक चर x में बहुपद है।
- **मानक रूप**: बहुपद को $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ \ldots \ + a_1 x + a_0$ के रूप में लिखा जाता है, जहाँ $a_n \neq 0$ ।
- **बहुपद की घात**: बहुपद में चर का सबसे बड़ा घातांक।
- उदाहरण: $4x^3 + 2x$ की घात **3** है।
- **बहुपद के प्रकार**:
- **रैखिक**: घात 1 (जैसे, $2x + 3$)
- **द्विघात**: घात 2 (जैसे, $x^2 + 5x - 6$)
- **घनीय**: घात 3 (जैसे, $3x^3 - 4x^2 + x - 7$)
- **अचर**: घात 0 (जैसे, 5)

परीक्षा सुझाव:
- एकपदी, द्विपद और त्रिपद (क्रमशः 1, 2, या 3 पदों वाले बहुपद) के बीच अंतर समझें।
- दिए गए बहुपदों की घात और प्रकार पहचानने का अभ्यास करें।

2.2 बहुपद के शून्यकों का ज्यामितीय अर्थ

मुख्य अवधारणाएँ:
- **बहुपद के शून्यक**: x के वे मान जिनके लिए $f(x) = 0$। ये बहुपद के ग्राफ के **x-अंत:खंड** होते हैं।
- **बहुपद का ग्राफ़**:
- **रैखिक बहुपद ($ax + b$)**: एक सीधी रेखा। शून्यक: वह बिंदु जहाँ रेखा x-अक्ष को काटती है।
- **द्विघात बहुपद ($ax^2 + bx + c$)**: एक परवलय। शून्यक: दो बिंदु (यदि विवेचक $D > 0$), एक बिंदु (यदि $D = 0$), या कोई वास्तविक शून्यक नहीं (यदि $D < 0$)।
- **घनीय बहुपद ($ax^3 + bx^2 + cx + d$)**: एक वक्र जो x-अक्ष को अधिकतम **तीन बिंदुओं** पर काट सकता है।

महत्वपूर्ण आरेख विवरण:
- **द्विघात ग्राफ़**:
- यदि $a > 0$, तो परवलय **ऊपर की ओर** खुलता है।
- यदि $a < 0$, तो परवलय **नीचे की ओर** खुलता है।
- **घनीय ग्राफ़**:
- ग्राफ़ में **स्थानीय उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ** हो सकते हैं, लेकिन यह हमेशा x-अक्ष को कम से कम एक बिंदु पर काटता है।

परीक्षा सुझाव:
- प्रश्न अक्सर ग्राफ़ से शून्यकों की संख्या निर्धारित करने या घात और अग्रग गुणांक के आधार पर ग्राफ़ बनाने के लिए कहते हैं।
- द्विघात बहुपदों के शून्यकों की प्रकृति जानने के लिए विवेचक $D = b^2 - 4ac$ का प्रयोग करें।

2.3 बहुपद के शून्यकों और गुणांकों के बीच संबंध

मुख्य अवधारणाएँ:
- **द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के लिए**:
- **शून्यकों का योग**: $-\frac{b}{a}$
- **शून्यकों का गुणनफल**: $\frac{c}{a}$
- **सूत्र**: यदि α और β शून्यक हैं, तो:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

- **घनीय बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के लिए**:
- **शून्यकों का योग**: $-\frac{b}{a}$
- **शून्यकों के युग्मों का गुणनफल योग**: $\frac{c}{a}$
- **शून्यकों का गुणनफल**: $-\frac{d}{a}$
- **सूत्र**: यदि α, β, γ शून्यक हैं, तो:

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

उदाहरण:
1. **द्विघात उदाहरण**:
- दिया गया बहुपद $2x^2 - 5x + 2$, शून्यक हैं $\frac{5}{2}$ और 1।
- योग: $\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} = -(-5/2)$।
- गुणनफल: $\frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2} = 2/2$।

1. **घनीय उदाहरण**:
2. दिया गया बहुपद $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, शून्यक हैं $1, 2, 3$।
3. योग: $1 + 2 + 3 = 6 = -(-6/1)$।
4. गुणनफल: $1 \times 2 \times 3 = 6 = -(-6/1)$।

परीक्षा सुझाव:
- उन प्रश्नों का अभ्यास करें जहाँ गुणांक दिए गए हों और छात्रों को शून्यक ढूँढ़ने हों या इसके विपरीत।
- दिए गए शून्यकों से बहुपद बनाने के लिए संबंध का उपयोग करें।

2.4 सारांश

मुख्य बिंदु:
- **बहुपद**: इनकी घात और प्रकार (रैखिक, द्विघात, घनीय) द्वारा परिभाषित किए जाते हैं।
- **शून्यक**: ग्राफ़ के x-अक्ष को काटने वाले बिंदुओं पर पाए जाते हैं; सूत्रों द्वारा गुणांकों से जुड़े होते हैं।
- **ग्राफिकल व्याख्या**:
- रैखिक: एक शून्यक।
- द्विघात: अधिकतम दो शून्यक (विवेचक पर आधारित)।
- घनीय: अधिकतम तीन शून्यक।
- **सूत्र**:
- द्विघात: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$।
- घनीय: $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$।

महत्वपूर्ण बातें:
- सूत्रों का उपयोग करके गुणांकों और शून्यकों के बीच संबंध की हमेशा पुष्टि करें।
- द्विघात और घनीय बहुपदों के लिए शून्यकों का स्थान निर्धारित करने हेतु ग्राफ़ का प्रयोग करें।
- बहुपद संकल्पनाओं को वास्तविक परिदृश्यों (जैसे लाभ/हानि मॉडल) पर लागू करने वाले प्रश्नों का अभ्यास करें।

अंतिम परीक्षा सुझाव:
- बोर्ड परीक्षाओं में इस विषय के भारी अंक होते हैं, इसलिए गुणांकों और शून्यकों के बीच संबंध को मज़बूती से समझें।
- द्विघात बहुपदों के लिए ग्राफिकल व्याख्याओं और विवेचक नियमों को पूरी तरह से दोहराएँ।

{}

निम्नलिखित में से कौन सा बहुपद नहीं है?

1. [ ] $3x^2 + 2x - 5$
2. [x] $\frac{1}{x} + 2$
3. [ ] $5x^3 - 4x + 7$
4. [ ] $2x^4 + 3x^2 - 1$

बहुपद $4x^3 + 2x$ की घात क्या है?

1. [ ] 4
2. [ ] 2
3. [x] 3
4. [ ] 1

बहुपद $x^2 + 5x - 6$ किस प्रकार का है?

1. [ ] रैखिक
2. [ ] घनीय
3. [x] द्विघात
4. [ ] अचर

द्विघात बहुपद का ग्राफिकल निरूपण क्या है?

1. [ ] एक सीधी रेखा
2. [ ] एक परवलय
3. [ ] एक घन वक्र
4. [ ] एक अतिपरवलय

द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के लिए, विवेचक $D = b^2 - 4ac$ क्या दर्शाता है?

1. [ ] शून्यकों का योग
2. [ ] शून्यकों का गुणनफल
3. [x] शून्यकों की प्रकृति
4. [ ] बहुपद की घात

यदि किसी द्विघात बहुपद का प्रमुख गुणांक धनात्मक है, तो उसका ग्राफ कैसा व्यवहार करता है?

1. [ ] नीचे की ओर खुलता है
2. [ ] बगल की ओर खुलता है
3. [x] ऊपर की ओर खुलता है
4. [ ] कोई x-अंत:खंड नहीं होता

एक घन बहुपद के अधिकतम कितने शून्यक हो सकते हैं?

1. [ ] 1
2. [ ] 2
3. [x] 3
4. [ ] 4

द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के लिए, शून्यकों के योग और गुणांकों के बीच क्या संबंध है?

1. [ ] योग = $\frac{b}{a}$
2. [ ] योग = $\frac{c}{a}$
3. [x] योग = $-\frac{b}{a}$
4. [ ] योग = $-\frac{c}{a}$

यदि किसी घन बहुपद के शून्यक α, β, γ हैं, तो बहुपद का सूत्र क्या है?

1. [ ] $x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$
2. [ ] $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$
3. [x] $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$
4. [ ] $x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$

निम्नलिखित में से किस बहुपद के शून्यक $1, 2, 3$ हैं?

1. [ ] $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
2. [ ] $x^3 - 7x^2 + 14x - 6$
3. [x] $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
4. [ ] $x^3 - 5x^2 + 11x - 6$ {}