अध्याय 3: दो चरों में रैखिक समीकरणों का युग्म

3.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ

- **दो चरों में रैखिक समीकरण**: **$ax + by + c = 0$** के रूप का समीकरण, जहाँ **a**, **b**, और **c** वास्तविक संख्याएँ हैं, और **a** तथा **b** दोनों शून्य नहीं हैं।
- **रैखिक समीकरण का हल**: समीकरण को संतुष्ट करने वाले मानों का युग्म (x, y)।
- **समीकरणों की प्रणाली**: समान चरों वाले दो या दो से अधिक रैखिक समीकरण।

महत्वपूर्ण बिंदु

- रैखिक समीकरणों के एक युग्म में **एक हल**, **कोई हल नहीं**, या **अनंत हल** हो सकते हैं, यह समीकरणों के बीच संबंध पर निर्भर करता है।
- **समीकरणों की संगतता**:
- **संगत**: कम से कम एक हल होता है (प्रतिच्छेदी या संपाती रेखाएँ)।
- **असंगत**: कोई हल नहीं होता है (समानांतर रेखाएँ)।

परीक्षा युक्तियाँ

- **आश्रित** (अनंत हल) और **स्वतंत्र** (अद्वितीय हल) समीकरणों के बीच अंतर को समझें।
- समीकरणों से हल के प्रकार की पहचान करने का अभ्यास करें।

3.2 रैखिक समीकरणों के युग्म का आलेखीय हल विधि

आलेखीय रूप से हल करने के चरण

1. **प्रत्येक समीकरण को $y = mx + c$ के रूप में पुनः लिखें** (ढलान-अंतःखंड रूप)।
2. **ग्राफ पेपर पर रेखाएँ आलेखित करें** प्रत्येक रेखा के लिए कम से कम दो बिंदु खोजकर।
3. **दोनों रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु को पहचानें**। यह बिंदु हल (x, y) को प्रदर्शित करता है।

आलेखीय हल के प्रकार

स्थिति	विवरण	आलेखीय निरूपण
अद्वितीय हल	रेखाएँ एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं।	
कोई हल नहीं	रेखाएँ समानांतर हैं।	
अनंत हल	रेखाएँ संपाती होती हैं (समान ढलान और अंतःखंड)।	

उदाहरण

हल करें:
1. **2x + y = 6**
2. **x - y = 1**

आलेखीय चरण:
- 2x + y = 6 के लिए → y = -2x + 6
- x - y = 1 के लिए → y = x - 1
- दोनों रेखाएँ आलेखित करें; इनका प्रतिच्छेदन बिंदु (x, y) = **(2, 2)** पर है।

परीक्षा युक्तियाँ

- विभिन्न स्थितियों के लिए समीकरणों को आलेखित करने का अभ्यास करें।
- याद रखें कि **समानांतर रेखाओं** का ढलान समान होता है लेकिन अंतःखंड भिन्न होते हैं।

3.3 रैखिक समीकरणों के युग्म को हल करने की बीजीय विधियाँ

3.3.1 प्रतिस्थापन विधि

चरण

1. **एक समीकरण को एक चर के लिए हल करें** (उदाहरण के लिए, x के पदों में y को हल करें)।
2. **अभिव्यक्ति को दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करें**।
3. **शेष चर के लिए हल करें**।
4. **मूल समीकरण में मान को प्रतिस्थापित करें** दूसरे चर को ज्ञात करने के लिए।

उदाहरण

हल करें:
1. **2x + y = 5**
2. **x - y = 1**

हल:
- समीकरण 2 से: **y = x - 1**
- समीकरण 1 में प्रतिस्थापित करें: **2x + (x - 1) = 5 → 3x = 6 → x = 2**
- x = 2 को y = x - 1 में प्रतिस्थापित करें: **y = 1**
- **हल**: (2, 1)

महत्वपूर्ण सूत्र

- **मानक रूप**: ax + by + c = 0
- **प्रतिस्थापन के परिणामस्वरूप**: एक चर में एकल समीकरण।

परीक्षा युक्तियाँ

- प्रतिस्थापन का उपयोग तब करें जब एक चर के लिए समीकरण आसानी से हल हो जाता हो।
- प्रतिस्थापन चरणों में गणना संबंधी त्रुटियों की जाँच करें।

3.3.2 निराकरण विधि

चरण

1. **समीकरणों को उपयुक्त संख्याओं से गुणा करें** ताकि एक चर के गुणांक समान (या विपरीत) हो जाएँ।
2. **एक चर को हटाने के लिए समीकरणों को जोड़ें या घटाएँ**।
3. **शेष चर के लिए हल करें**।
4. **दूसरे चर को ज्ञात करने के लिए मूल समीकरण में प्रतिस्थापित करें**।

उदाहरण

हल करें:

1. **3x + 2y = 8**
2. **2x - y = 1**

हल:
- समीकरण 2 को 2 से गुणा करें: **4x - 2y = 2**
- इसे समीकरण 1 में जोड़ें: **(3x + 2y) + (4x - 2y) = 8 + 2 → 7x = 10 → x = 10/7**
- x = 10/7 को समीकरण 2 में प्रतिस्थापित करें: **2*(10/7) - y = 1 → y = 20/7 - 1 = 13/7**
- **हल**: (10/7, 13/7)

महत्वपूर्ण सूत्र

- **निराकरण के परिणामस्वरूप**: एक चर में एकल समीकरण।
- **मुख्य शर्त**: एक चर के गुणांक समान या विपरीत होने चाहिए।

परीक्षा युक्तियाँ

- निराकरण का उपयोग तब करें जब गुणांक व्यवस्थित हों (जैसे, भिन्न न हों)।
- गुणांकों को समान करने के लिए समीकरणों को गुणा करने का अभ्यास करें।

3.4 सारांश

मुख्य बातें

- **आलेखीय विधि**: रेखाओं के प्रतिच्छेदन के रूप में हल को दृश्यमान बनाती है।
- **बीजीय विधियाँ**:
- **प्रतिस्थापन**: पहले एक चर को हल करती है।
- **निराकरण**: जोड़/घटाव द्वारा एक चर को हटाती है।
- **संगतता**:
- **अद्वितीय हल**: प्रतिच्छेदी रेखाएँ।
- **कोई हल नहीं**: समानांतर रेखाएँ।
- **अनंत हल**: संपाती रेखाएँ।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. मानक रूप: **ax + by + c = 0**
2. ढलान-अंतःखंड रूप: **y = mx + c**
3. निकाय का हल: **(x, y)** जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करता है।

परीक्षा युक्तियाँ

- संगतता की शर्तों को याद रखें।
- दोनों विधियों का उपयोग करके समस्याओं को हल करने का अभ्यास करें।
- NCERT अभ्यासों पर ध्यान दें (जैसे, अभ्यास 3.1, 3.2, 3.3)।

{}

निम्नलिखित में से कौन दो चरों वाले रैखिक समीकरण को परिभाषित करता है?

1. [x] ax + by + c = 0 (जहाँ a और b दोनों शून्य नहीं हैं)
2. [ ] y = mx + c (ढलान-अंतःखंड रूप)
3. [ ] x + y = k (स्थिर योग)
4. [ ] 2x + 3y = 5 (मानक रूप का विशिष्ट उदाहरण)

रैखिक समीकरण का हल क्या दर्शाता है?

1. [ ] रेखा का आलेख
2. [ ] समीकरण को संतुष्ट करने वाले मानों का युग्म (x, y)
3. [ ] रेखा का ढलान
4. [ ] अक्षों पर अंतःखंड

रैखिक समीकरणों के एक युग्म के किस प्रकार के हल हो सकते हैं?

1. [ ] केवल एक हल
2. [ ] कोई हल नहीं
3. [ ] अनंत हल
4. [x] उपरोक्त सभी

रैखिक समीकरणों के एक युग्म का कौन-सा चित्रमय प्रदर्शन कोई हल न होने को दर्शाता है?

1. [ ] प्रतिच्छेदी रेखाएँ
2. [ ] संपाती रेखाएँ
3. [ ] समानांतर रेखाएँ
4. [ ] वक्र रेखाएँ

कौन-सी बीजीय विधि में पहले एक चर को हल किया जाता है?

1. [ ] निराकरण विधि
2. [ ] आलेखीय विधि
3. [x] प्रतिस्थापन विधि
4. [ ] उपरोक्त सभी

अनंत हलों के लिए दो समीकरणों को कौन-सी शर्त पूरी करनी चाहिए?

1. [ ] समान ढलान और भिन्न अंतःखंड
2. [ ] भिन्न ढलान और समान अंतःखंड
3. [ ] समान ढलान और समान अंतःखंड
4. [ ] भिन्न ढलान और भिन्न अंतःखंड

रैखिक समीकरण का ढलान-अंतःखंड रूप क्या है?

1. [ ] $ax + by + c = 0$
2. [ ] $2x + 3y = 5$
3. [ ] $y = mx + c$
4. [ ] $x + y = k$

कौन-सी विधि में जोड़ या घटाव द्वारा एक चर को हटाया जाता है?

1. [ ] प्रतिस्थापन विधि
2. [ ] आलेखीय विधि
3. [ ] निराकरण विधि
4. [ ] उपरोक्त सभी

समीकरणों की निकाय की संगतता क्या निर्धारित करती है?

1. [ ] x और y के गुणांक
2. [ ] ढलानों और अंतःखंडों के बीच संबंध
3. [ ] हल का प्रकार (अद्वितीय, कोई नहीं, अनंत)
4. [x] उपरोक्त सभी

कौन-सा सूत्र रैखिक समीकरण के मानक रूप को दर्शाता है?

1. [ ] $y = mx + c$
2. [ ] $x + y = k$
3. [ ] $ax + by + c = 0$
4. [ ] $2x + 3y = 5$ {}