अध्याय 8: त्रिकोणमिति का परिचय

8.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ

- **त्रिकोणमिति** त्रिभुजों, विशेष रूप से समकोण त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों के बीच संबंधों का अध्ययन है।
- **उत्पत्ति**: ग्रीक शब्दों *trigonon* (त्रिभुज) और *metron* (माप) से व्युत्पन्न।
- **अनुप्रयोग**: नौवहन, खगोल विज्ञान, इंजीनियरिंग और दैनिक जीवन (जैसे, भवनों की ऊँचाई, ढलान आदि मापने) में उपयोग किया जाता है।
- **समकोण त्रिभुज**: एक त्रिभुज जिसका एक कोण 90° के बराबर होता है। भुजाओं को इस प्रकार लेबल किया जाता है:
- **विपरीत**: कोण के सामने वाली भुजा।
- **आसन्न**: कोण के निकटवर्ती भुजा।
- **कर्ण**: सबसे लंबी भुजा, समकोण के सामने।

परीक्षा सुझाव

- त्रिकोणमितीय अनुपातों को परिभाषित करने में समकोण त्रिभुजों के महत्व को समझें।
- वास्तविक दुनिया के परिदृश्यों (जैसे, ऊँचाई या दूरी की गणना) से संबंधित समस्याओं का अभ्यास करें।

8.2 त्रिकोणमितीय अनुपात

परिभाषाएँ

कोण θ वाले एक समकोण त्रिभुज के लिए:
- **साइन (sin)**: विपरीत / कर्ण
- **कोसाइन (cos)**: आसन्न / कर्ण
- **टैन्जेंट (tan)**: विपरीत / आसन्न
- **कोटैन्जेंट (cot)**: आसन्न / विपरीत
- **सेकेंट (sec)**: कर्ण / आसन्न
- **कोसेकेंट (csc)**: कर्ण / विपरीत

सूत्र सारांश

अनुपात	संक्षिप्त नाम	सूत्र
साइन	sin	विपरीत / कर्ण
कोसाइन	cos	आसन्न / कर्ण

अनुपात	संक्षिप्त नाम	सूत्र
टैन्जेंट	tan	विपरीत / आसन्न
कोटैन्जेंट	cot	आसन्न / विपरीत
सेकेंट	sec	कर्ण / आसन्न
कोसेकेंट	csc	कर्ण / विपरीत

उदाहरण

एक त्रिभुज में कर्ण 5 cm, विपरीत भुजा 3 cm, और आसन्न भुजा 4 cm है:
- $\sin \theta = 3/5$, $\cos \theta = 4/5$, $\tan \theta = 3/4$

परीक्षा सुझाव

- अनुपातों को याद रखने के लिए **SOH-CAH-TOA** स्मरक का उपयोग करें।
- दिए गए त्रिभुजों के लिए अनुपातों की गणना का अभ्यास करें।
- उन समस्याओं पर ध्यान दें जहाँ आपको लुप्त भुजाओं या कोणों को खोजने की आवश्यकता है।

8.3 कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

मुख्य कोण: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°

मान सारणी

कोण	sin θ	cos θ	tan θ
0°	0	1	0
30°	1/2	√3/2	1/√3
45°	√2/2	√2/2	1
60°	√3/2	1/2	√3
90°	1	0	∞

व्युत्पत्ति

- **30° और 60°**: समबाहु त्रिभुजों से व्युत्पन्न (दो 30-60-90 त्रिभुजों में विभाजित)।
- **45°**: समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों से व्युत्पन्न।
- **0° और 90°**: ज्यामितीय व्याख्याओं (जैसे, sin 0° = 0 क्योंकि विपरीत भुजा शून्य है) के साथ विशेष मामले।

उदाहरण

tan 60° पता करें:
- सारणी से, tan 60° = √3.

परीक्षा सुझाव

- इन कोणों के मानों को याद करें।
- त्रिभुजों या वास्तविक जीवन के परिदृश्यों में कोणों से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए इन मानों का उपयोग करें।
- डिग्री और रेडियन के बीच परिवर्तित करने का अभ्यास करें (हालांकि कक्षा 10 के लिए आवश्यक नहीं है)।

8.4 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

मुख्य सर्वसमिकाएँ

1. **पाइथागोरस सर्वसमिका**:
2. **$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$**
3. **व्युत्क्रम सर्वसमिकाएँ**:
4. **cosec θ = 1/sin θ**, **sec θ = 1/cos θ**, **cot θ = 1/tan θ**
5. **टैन्जेंट और कोटैन्जेंट सर्वसमिकाएँ**:
6. **tan θ = sin θ / cos θ**, **cot θ = cos θ / sin θ**

अनुप्रयोग

- त्रिकोणमितीय व्यंजकों को सरल बनाना।
- त्रिकोणमितीय अनुपातों वाले समीकरणों को हल करना।
- सर्वसमिकाओं को सिद्ध करना (जैसे, दिखाना कि $(1 - \cos^2\theta) = \sin^2\theta$)।

उदाहरण

सिद्ध करें: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- समकोण त्रिभुज में पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करें: $(\text{विपरीत})^2 + (\text{आसन्न})^2 = (\text{कर्ण})^2$
- दोनों पक्षों को $(\text{कर्ण})^2$ से विभाजित करें: $(\text{विपरीत}/\text{कर्ण})^2 + (\text{आसन्न}/\text{कर्ण})^2 = 1 \rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

परीक्षा सुझाव

- समस्याओं को हल करने के लिए पाइथागोरस सर्वसमिका में महारत हासिल करें क्योंकि यह मौलिक है।
- सर्वसमिकाओं का उपयोग करके व्यंजकों को सरल बनाने का अभ्यास करें।
- व्युत्क्रम और टैन्जेंट/कोटैन्जेंट संबंधों के साथ सावधान रहें।

8.5 सारांश

मुख्य बिंदु

- **त्रिकोणमिति** समकोण त्रिभुजों में भुजाओं के अनुपात से संबंधित है।
- **त्रिकोणमितीय अनुपात** (sin, cos, tan, आदि) कोण θ के आधार पर परिभाषित किए गए हैं।
- **विशिष्ट कोण** (0°, 30°, 45°, 60°, 90°) के निश्चित अनुपात मान होते हैं।
- समीकरणों को सरल बनाने और हल करने के लिए **त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ** आवश्यक हैं।

सूत्र पुनर्कथन

- sin θ = विपरीत / कर्ण
- cos θ = आसन्न / कर्ण
- tan θ = विपरीत / आसन्न
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

परीक्षा की तैयारी

- एनसीईआरटी के उदाहरणों और अभ्यासों को पूरी तरह से संशोधित करें।
- वास्तविक जीवन के अनुप्रयोगों (जैसे, ऊँचाई या दूरी खोजने) से संबंधित समस्याओं का अभ्यास करें।
- त्रिकोणों और अनुपातों को कल्पना करने के लिए आरेखों का उपयोग करें।

{}

निम्नलिखित में से कौन सा त्रिकोणमिति की उत्पत्ति का सही वर्णन करता है?

1. [x] ग्रीक शब्द *trigonon* (त्रिभुज) और *metron* (माप) से
2. [ ] लैटिन शब्द *tri* (तीन) और *gonia* (कोण) से
3. [ ] अरबी शब्द *tan* (ढलान) और *jiba* (जीवा) से
4. [ ] फ्रेंच शब्द *tri* (तीन) और *gon* (कोना) से

निम्नलिखित में से कौन सा अनुप्रयोग त्रिकोणमिति के लिए पाठ में उल्लिखित नहीं है?

1. [ ] नौवहन
2. [ ] खगोल विज्ञान
3. [ ] वास्तुकला
4. [x] भौतिकी (विशेष रूप से यांत्रिकी)

एक समकोण त्रिभुज में, कौन सी भुजा कर्ण होती है?

1. [ ] समकोण के समीपवर्ती भुजा
2. [ ] समकोण के विपरीत भुजा
3. [x] समकोण के विपरीत सबसे लंबी भुजा
4. [ ] लंबाई शून्य वाली भुजा

कौन सा स्मरक त्रिकोणमितीय अनुपातों को सही ढंग से दर्शाता है?

1. [ ] SOH-CAH-TOA (साइन = कर्ण/विपरीत, कोसाइन = आसन्न/कर्ण, टैनजेंट = विपरीत/आसन्न)
2. [x] SOH-CAH-TOA (साइन = विपरीत/कर्ण, कोसाइन = आसन्न/कर्ण, टैनजेंट = विपरीत/आसन्न)
3. [ ] SOH-CAH-TOA (साइन = आसन्न/कर्ण, कोसाइन = विपरीत/कर्ण, टैनजेंट = विपरीत/आसन्न)
4. [ ] SOH-CAH-TOA (साइन = विपरीत/आसन्न, कोसाइन = आसन्न/कर्ण, टैनजेंट = विपरीत/कर्ण)

tan 60° का मान क्या है?

1. [ ] $1/\sqrt{3}$
2. [ ] $\sqrt{3}/2$
3. [x] $\sqrt{3}$
4. [ ] 1

कौन सी पहचान पाइथागोरस पहचान नहीं है?

1. [ ] $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. [x] $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
3. [ ] $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
4. [ ] $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 0$

कोटैंजेंट की परिभाषा क्या है?

1. [ ] कर्ण/विपरीत
2. [x] आसन्न/विपरीत
3. [ ] विपरीत/आसन्न
4. [ ] कर्ण/आसन्न

कौन सा कोण एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज से लिया गया है?

1. [ ] 30°
2. [x] 45°
3. [ ] 60°
4. [ ] 90°

कौन सी व्युत्क्रम पहचान सही है?

1. [ ] कोसेक θ = 1/साइन θ
2. [x] सेक θ = 1/कोस θ
3. [ ] कोट θ = 1/टैन θ
4. [ ] उपरोक्त सभी

पाइथागोरस पहचान ($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$) क्यों मौलिक है?

1. [ ] यह सभी त्रिकोणमितीय समीकरणों को सरल बनाती है
2. [x] यह पाइथागोरस प्रमेय से ली गई है और समस्याओं को हल करने के लिए आवश्यक है
3. [ ] यह बिना त्रिभुजों के कोणों की गणना करने की अनुमति देती है
4. [ ] यह अन्य सभी त्रिकोणमितीय पहचानों को प्रतिस्थापित करती है {}