अध्याय 7: निर्देशांक ज्यामिति

7.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ

- **निर्देशांक ज्यामिति**: गणित की एक शाखा जो ज्यामितीय आकृतियों और चित्रों का वर्णन करने के लिए बीजीय समीकरणों का उपयोग करती है।
- **निर्देशांक तल**: एक 2D तल जो एक क्षैतिज अक्ष (x-अक्ष) और एक ऊर्ध्वाधर अक्ष (y-अक्ष) के प्रतिच्छेदन से बनता है।
- **बिंदु के निर्देशांक**: तल पर एक बिंदु को (x, y) के रूप में दर्शाया जाता है, जहाँ **x** मूल बिंदु से क्षैतिज दूरी है और **y** ऊर्ध्वाधर दूरी है।

महत्व

- ज्यामितीय समस्याओं को बीजगणितीय रूप से हल करने में मदद करता है।
- मानचित्रण, नेविगेशन और इंजीनियरिंग जैसे वास्तविक जीवन के अनुप्रयोगों में उपयोग किया जाता है।

परीक्षा युक्तियाँ

- निर्देशांक तल की मूल बातें और बिंदुओं को आलेखित करने का तरीका समझें।
- ऐतिहासिक संदर्भ (जैसे डेसकार्टेस का योगदान) को याद रखें क्योंकि यह लघु-उत्तर प्रश्नों में पूछा जा सकता है।

7.2 दूरी सूत्र

सूत्र

दो बिंदुओं **P(x_1, y_1)** और **Q(x_2, y_2)** के बीच की दूरी:

$$\text{Distance} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- **व्युत्पत्ति**: पाइथागोरस प्रमेय पर आधारित।

महत्वपूर्ण बिंदु

- **समकोण त्रिभुज**: रेखाखंड PQ एक समकोण त्रिभुज का कर्ण है जो बिंदुओं के बीच की क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दूरियों से बनता है।
- **इकाइयाँ**: दूरी हमेशा एक धनात्मक मात्रा है।

उदाहरण

A(2, 3) और **B(5, 7)** के बीच की दूरी ज्ञात करें:

$$\sqrt{(5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ units}$$

संभावित परीक्षा प्रश्न

1. दिए गए दो बिंदुओं के बीच की दूरी ज्ञात करें।
2. पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करके दूरी सूत्र को प्रमाणित करें।
3. यह जाँचने के लिए दूरी सूत्र का उपयोग करें कि क्या तीन बिंदु एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

परीक्षा युक्तियाँ

- सूत्र को याद रखें और पूर्णांक निर्देशांक वाली समस्याओं का अभ्यास करें।
- अंतर (x_2 - x_1) और (y_2 - y_1) की गणना करते समय संकेतों से सावधान रहें।

7.3 खंड सूत्र

आंतरिक विभाजन के लिए सूत्र

यदि कोई बिंदु **P(x, y)**, **A(x_1, y_1)** और **B(x_2, y_2)** को मिलाने वाले रेखाखंड को **m:n** अनुपात में विभाजित करता है, तो:

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

- **मध्यबिंदु सूत्र** (विशेष मामला जहाँ **m:n = 1:1**):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

बाह्य विभाजन के लिए सूत्र

m:n अनुपात में बाह्य विभाजन के लिए:

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \quad y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$$

महत्वपूर्ण बिंदु

- **आंतरिक विभाजन**: बिंदु A और B के बीच स्थित होता है।
- **बाह्य विभाजन**: बिंदु रेखाखंड AB के बाहर स्थित होता है।
- **संकेत परिपाटी**: आंतरिक विभाजन के लिए **+** और बाह्य विभाजन के लिए **-** का उपयोग करें।

उदाहरण

A(1, 2) और **B(4, 6)** को मिलाने वाले रेखाखंड को **2:1** अनुपात (आंतरिक) में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करें:

$$x = \frac{2\cdot4 + 1\cdot1}{2 + 1} = \frac{8 + 1}{3} = 3, \quad y = \frac{2\cdot6 + 1\cdot2}{3} = \frac{12 + 2}{3} = \frac{14}{3}$$

परिणाम: **(3, 14/3)**

संभावित परीक्षा प्रश्न

1. किसी रेखाखंड को दिए गए अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करें।
2. रेखाखंड के मध्यबिंदु को ज्ञात करने के लिए खंड सूत्र का उपयोग करें।
3. बाह्य विभाजन से जुड़ी समस्याओं को हल करें।

परीक्षा युक्तियाँ

- आंतरिक और बाह्य विभाजन को स्पष्ट रूप से अंतर करें।
- गणना त्रुटियों से बचने के लिए भिन्नात्मक निर्देशांक वाली समस्याओं का अभ्यास करें।

7.4 सारांश

मुख्य सूत्र

1. **दूरी सूत्र**:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. **खंड सूत्र (आंतरिक)**:

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$$

3. **खंड सूत्र (बाह्य)**:

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}\right)$$

महत्वपूर्ण अवधारणाएँ

- निर्देशांक ज्यामिति बीजगणित और ज्यामिति को मिलाती है।
- दूरी सूत्र पाइथागोरस प्रमेय से व्युत्पन्न होता है।
- खंड सूत्र का उपयोग रेखाखंड को दिए गए अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु को ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

परीक्षा युक्तियाँ

- सूत्रों और उनकी व्युत्पत्ति को पूरी तरह से संशोधित करें।
- एनसीईआरटी अभ्यास और इक्ज़ेम्पलर समस्याओं का अभ्यास करें।
- गणनाओं में सटीकता पर ध्यान दें (विशेषकर ऋणात्मक संकेतों के साथ)।

{}

दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात करने के लिए किस सूत्र का उपयोग किया जाता है?

1. [x] $\sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$
2. [ ] $\sqrt{[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2]}$
3. [ ] $\sqrt{[(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)]}$
4. [ ] $\sqrt{[(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2]}$

निर्देशांक ज्यामिति में समन्वय तल का क्या महत्व है?

1. [ ] इसका उपयोग त्रिभुजों में कोणों को मापने के लिए किया जाता है।
2. [ ] यह बीजगणितीय रूप से ज्यामितीय समस्याओं को हल करने में मदद करता है।
3. [x] यह x-अक्ष और y-अक्ष के प्रतिच्छेदन से बनने वाला एक 2D तल है।
4. [ ] इसका उपयोग विशेष रूप से रैखिक समीकरणों के ग्राफ़ प्लॉट करने के लिए किया जाता है।

निम्नलिखित में से निर्देशांक ज्यामिति का सही अनुप्रयोग कौन सा है?

1. [ ] निर्देशांक के बिना त्रिभुज के क्षेत्रफल की गणना करना।
2. [x] अक्षांश और देशांतर का उपयोग करके स्थानों का मानचित्रण करना।
3. [ ] बिना आरेखों के अनियमित आकृतियों की परिधि ज्ञात करना।
4. [ ] 3D वस्तुओं का आयतन निर्धारित करना।

यदि कोई बिंदु किसी रेखाखंड को आंतरिक रूप से m:n अनुपात में विभाजित करता है, तो किस सूत्र का उपयोग किया जाता है?

1. [ ] $(m x_1 - n x_2)/(m - n)$, $(m y_1 - n y_2)/(m - n)$
2. [ ] $(m x_1 + n x_2)/(m - n)$, $(m y_1 + n y_2)/(m - n)$
3. [x] $(m x_2 + n x_1)/(m + n)$, $(m y_2 + n y_1)/(m + n)$
4. [ ] $(m x_2 - n x_1)/(m + n)$, $(m y_2 - n y_1)/(m + n)$

मध्यबिंदु सूत्र किससे प्राप्त होता है?

1. [ ] 1:2 अनुपात वाले खंड सूत्र से।
2. [x] 1:1 अनुपात वाले खंड सूत्र से।
3. [ ] वर्ग पदों वाले दूरी सूत्र से।
4. [ ] बाह्य विभाजन सूत्र से।

निर्देशांक ज्यामिति के विकास से कौन सा ऐतिहासिक व्यक्ति जुड़ा हुआ है?

1. [ ] आइजैक न्यूटन
2. [x] रेने डेसकार्टेस
3. [ ] पाइथागोरस
4. [ ] यूक्लिड

यदि A(1, 2) और B(4, 6) के बीच की दूरी की गणना की जाती है, तो परिणाम क्या होगा?

1. [ ] 5 यूनिट
2. [x] $\sqrt{[(3)^2 + (4)^2]}$
3. [ ] $\sqrt{(9 + 16)}$
4. [ ] $\sqrt{(25)}$ यूनिट

A(1, 2) और B(4, 6) के बीच AB को 2:1 के आंतरिक अनुपात में विभाजित करने वाले बिंदु का सही निर्देशांक क्या है?

1. [ ] (3, 4)
2. [x] (3, 14/3)
3. [ ] (2, 5)
4. [ ] (5, 8)

बाह्य विभाजन के बारे में निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

1. [x] बिंदु खंड AB के बाहर स्थित होता है।
2. [ ] अनुपात हमेशा सकारात्मक होता है।
3. [ ] यह आंतरिक विभाजन के समान सूत्र का उपयोग करता है।
4. [ ] इसका उपयोग मध्यबिंदु ढूंढने के लिए किया जाता है।

समन्वय तल का प्राथमिक उद्देश्य क्या है?

1. [ ] 2D स्पेस में 3D वस्तुओं का प्रतिनिधित्व करना।
2. [x] होरिजॉन्टल और वर्टिकल दूरी का उपयोग करके पॉइंट्स को लोकेट करना।
3. [ ] निर्देशांक के बिना बहुभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करना।
4. [ ] द्विघात समीकरणों को ग्राफ़िक रूप से हल करना। {}