

****अध्याय 10: वृत्त ****

10.1 परिचय

मुख्य अवधारणाएँ

- **वृत्त**: एक बंद वक्र जहाँ सभी बिंदु एक निश्चित बिंदु (केंद्र) से समदूरस्थ होते हैं।
- **त्रिज्या**: केंद्र से वृत्त पर किसी भी बिंदु की दूरी।
- **जीवा**: वृत्त पर दो बिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड।
- **व्यास**: केंद्र से गुजरने वाली जीवा; इसकी लंबाई त्रिज्या की दोगुनी होती है।
- **परिधि**: वृत्त के चारों ओर की कुल लंबाई (सूत्र: $C = 2\pi r$)।

महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

- **छेदक रेखा**: एक रेखा जो वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
- **स्पर्श रेखा**: एक रेखा जो वृत्त को ठीक एक बिंदु पर स्पर्श करती है।

परीक्षा टिप्स

- **जीवा** और **व्यास** के बीच अंतर समझें।
- वृत्त की **परिधि** और **क्षेत्रफल** के सूत्र याद रखें (हालाँकि क्षेत्रफल एक बाद के अध्याय में शामिल है)।
- स्पर्श रेखाओं और छेदक रेखाओं को दृश्यात्मक रूप से समझने के लिए आरेख महत्वपूर्ण हैं।

10.2 वृत्त की स्पर्श रेखा

मुख्य प्रमेय

1. **स्पर्श रेखा-त्रिज्या अनुलंबता प्रमेय**:
2. वृत्त की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या के **लंबवत** होती है।
3. **संकेत**: यदि AB बिंदु P पर एक स्पर्श रेखा है, तो $\angle OPA = 90^\circ$, जहाँ O केंद्र है।
4. **बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखा की लंबाई**:
5. यदि केंद्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त पर एक बाह्य बिंदु P से स्पर्श रेखा खींची जाती है, तो स्पर्श रेखा की लंबाई l है:

$$l = \sqrt{d^2 - r^2}$$

जहाँ d , P से O तक की दूरी है।

महत्वपूर्ण आरेख

- **आरेख 1:** केंद्र O वाला एक वृत्त, बिंदु P पर एक स्पर्श रेखा, और त्रिज्या OP एक समकोण बनाती है।
- **आरेख 2:** एक बाह्य बिंदु P , वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB , जहाँ $OA \perp PA$ और $OB \perp PB$ ।

उदाहरण

- **उदाहरण 1:** यदि किसी वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है और केंद्र से एक बाह्य बिंदु की दूरी 13 सेमी है, तो स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
- **हल:** $l = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ सेमी।

परीक्षा टिप्स

- **स्पर्श रेखा की लंबाई** वाले प्रश्नों का अभ्यास करें।
- याद रखें कि **समान बाह्य बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं** (10.3 में शामिल)।
- स्पर्श रेखा-त्रिज्या अनुलंबता जैसे प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए आरेखों का उपयोग करें।

10.3 वृत्त पर एक बिंदु से स्पर्श रेखाओं की संख्या

मुख्य अवधारणाएँ

- स्थिति 1: वृत्त के अंदर स्थित बिंदु
- स्पर्श रेखाओं की संख्या: 0।
- स्थिति 2: वृत्त पर स्थित बिंदु
- स्पर्श रेखाओं की संख्या: 1।
- स्थिति 3: वृत्त के बाहर स्थित बिंदु
- स्पर्श रेखाओं की संख्या: 2।

SATHEE

महत्वपूर्ण प्रमेय

- **समान स्पर्श रेखाएँ प्रमेय:**
- एक बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ **लंबाई में बराबर** होती हैं।
- **संकेत:** यदि PA और PB बिंदु P से खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं, तो $PA = PB$ ।

महत्वपूर्ण आरेख

- **आरेख 3:** केंद्र O वाला वृत्त, एक बाह्य बिंदु P और दो स्पर्श रेखाएँ PA और PB ।
- **आरेख 4:** वृत्त पर स्थित एक बिंदु जिससे केवल एक स्पर्श रेखा खींची जाती है।

उदाहरण

- **उदाहरण 2:** यदि किसी वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है और केंद्र से बाह्य बिंदु की दूरी 25 सेमी है, तो प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
- **हल:** $l = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$ सेमी।

परीक्षा टिप्स

- स्पर्श रेखाओं की संख्या के **तीनों मामलों** को याद रखें।
- बिंदु की स्थिति के आधार पर स्पर्श रेखाओं की संख्या निर्धारित करने वाले प्रश्नों का अभ्यास करें।
- कोणों या लंबाइयों से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिए **समान स्पर्श रेखाएँ प्रमेय** का उपयोग करें।

10.4 सारांश

याद रखने योग्य प्रमुख बिंदु

- **स्पर्श रेखा** एक रेखा है जो वृत्त को एक बिंदु पर स्पर्श करती है और उस बिंदु पर त्रिज्या के लंबवत होती है।
- बाह्य बिंदु से **स्पर्श रेखा की लंबाई** $\sqrt{d^2 - r^2}$ का उपयोग करके गणना की जाती है।
- **स्पर्श रेखाओं की संख्या** बाह्य बिंदु की स्थिति पर निर्भर करती है: 0 (अंदर), 1 (वृत्त पर), या 2 (बाहर)।
- एक बाह्य बिंदु से खींची गई **समान स्पर्श रेखाएँ** हमेशा सर्वांगसम होती हैं।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. स्पर्श रेखा की लंबाई $= \sqrt{d^2 - r^2}$
2. परिधि $= 2\pi r$

SATHEE

परीक्षा टिप्स

- **प्रमेय-आधारित प्रश्नों** पर ध्यान दें (जैसे, स्पर्श रेखा-त्रिज्या प्रमेय को सिद्ध करना)।
- सभी मामलों के लिए **आरेख** बनाने का अभ्यास करें।
- **समान स्पर्श रेखाएँ** और **स्पर्श रेखाओं की लंबाई** से संबंधित प्रश्नों को हल करें।

}

निम्नलिखित में से कौन सा वृत्त की सही परिभाषा है?

1. ☒ एक बंद वक्र जहाँ सभी बिंदु एक निश्चित बिंदु (केंद्र) से समदूरस्थ होते हैं।
2. ☐ एक रेखाखंड जो वृत्त पर दो बिंदुओं को जोड़ता है।
3. ☐ एक रेखा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
4. ☐ वृत्त के चारों ओर की कुल लंबाई।

स्पर्श बिंदु पर एक स्पर्श रेखा और त्रिज्या के बीच क्या संबंध होता है?

1. ☐ स्पर्श रेखा त्रिज्या के समानांतर होती है।
2. ☒ स्पर्श रेखा त्रिज्या के लंबवत होती है।
3. ☐ स्पर्श रेखा त्रिज्या से लंबी होती है।
4. ☐ स्पर्श रेखा त्रिज्या की आधी लंबाई की होती है।

यदि एक बिंदु वृत्त के अंदर स्थित है, तो उस बिंदु से वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

1. ☐ 0
2. ☒ 1
3. ☐ 2
4. ☐ 3

निम्नलिखित में से कौन सा सूत्र वृत्त की परिधि को सही तरीके से दर्शाता है?

1. ☐ $C = \pi r$
2. ☒ $C = 2\pi r$
3. ☐ $C = \pi d$
4. ☐ $C = \pi r^2$

5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त और केंद्र से बिंदु की दूरी 13 सेमी होने पर एक बाह्य बिंदु से वृत्त तक स्पर्श रेखा की लंबाई क्या है?

1. ☐ 8 सेमी
2. ☒ 12 सेमी
3. ☐ 13 सेमी
4. ☐ 15 सेमी

निम्नलिखित में से कौन सा वृत्त की स्पर्श रेखा नहीं है?

1. ☐ एक रेखा जो वृत्त को ठीक एक बिंदु पर स्पर्श करती है।
2. ☐ एक रेखा जो वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
3. ☐ एक रेखा जो स्पर्श बिंदु पर त्रिज्या के लंबवत होती है।
4. ☐ एक रेखा जो केंद्र से गुजरती है।

यदि किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं, तो उनकी लंबाइयों के बारे में क्या सत्य है?

1. ☐ वे लंबाई में असमान होती हैं।
2. ☒ वे लंबाई में समान होती हैं।
3. ☐ एक लंबी और एक छोटी होती है।
4. ☐ उनकी लंबाई त्रिज्या पर निर्भर करती है।

वृत्त पर दो बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखाखंड को क्या कहते हैं?

1. ☐ व्यास
2. ☐ त्रिज्या
3. ☒ जीवा
4. ☐ छेदक रेखा

यदि केंद्र से बाह्य बिंदु की दूरी 25 सेमी और त्रिज्या 7 सेमी है, तो बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखा की लंबाई क्या है?

1. ☐ 24 सेमी
2. ☒ 24 सेमी
3. ☐ 25 सेमी
4. ☐ 7 सेमी

निम्नलिखित में से छेदक रेखाओं के बारे में कौन सा कथन सही है?

1. ☐ एक छेदक रेखा वृत्त को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।
2. ☒ एक छेदक रेखा वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
3. ☐ एक छेदक रेखा एक स्पर्श रेखा के समान होती है।
4. ☐ एक छेदक रेखा एक रेखाखंड है, रेखा नहीं। {}