अध्याय सारांश: वृत्त

परिचय

यह अध्याय वृत्तों के मूलभूत गुणों की खोज करता है, जिसमें उनके समीकरणों, स्पशरिखाओं और एकाधिक वृत्तों के बीच संबंधों पर ध्यान केंद्रित किया गया है। मुख्य अवधारणाओं में एक वृत्त के समीकरण का मानक रूप, स्पशरिखाओं के प्रकार (बाह्य और आंतरिक), और वृत्तों के स्पर्श या प्रतिच्छेद करने की शर्तें शामिल हैं। अध्याय वृत्तों और उनके केंद्रों, त्रिज्याओं और उभयनिष्ठ स्पशरिखाओं के बीच ज्यामितीय संबंधों पर भी जोर देता है।

अध्याय सारांश: वृत्त

परिचय

यह अध्याय वृत्तों के मूलभूत गुणों की खोज करता है, जिसमें उनके समीकरणों, स्पशरिखाओं और एकाधिक वृत्तों के बीच संबंधों पर ध्यान केंद्रित किया गया है। मुख्य अवधारणाओं में एक वृत्त के समीकरण का मानक रूप, स्पशरिखाओं के प्रकार (बाह्य और आंतरिक), और वृत्तों के स्पर्श या प्रतिच्छेद करने की शर्तें शामिल हैं। अध्याय वृत्तों और उनके केंद्रों, त्रिज्याओं और उभयनिष्ठ स्पशरिखाओं के बीच ज्यामितीय संबंधों पर भी जोर देता है।

मुख्य अवधारणाएँ और सूत्र

1. वृत्त का समीकरण

- **मानक रूप**:
  केंद्र (h, k) और त्रिज्या r वाले वृत्त का समीकरण है:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

- **सामान्य रूप**:
  मानक रूप का विस्तार करने पर प्राप्त होता है:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

जहाँ $D = -2h$, $E = -2k$, और $F = h^2 + k^2 - r^2$।

2. वृत्त की स्पर्शरेखाएँ

- **बाह्य स्पर्शरेखा**: एक रेखा जो दो वृत्तों को विभिन्न बिंदुओं पर स्पर्श करती है, लेकिन उनके केंद्रों को मिलाने वाले रेखा खंड को पार नहीं करती है।
- **आंतरिक स्पर्शरेखा**: एक रेखा जो दो वृत्तों को विभिन्न बिंदुओं पर स्पर्श करती है और उनके केंद्रों को मिलाने वाले रेखा खंड को पार करती है।
- **उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाओं की संख्या**:
- **4 स्पर्शरेखाएँ** यदि वृत्त अलग-अलग हैं।
- **3 स्पर्शरेखाएँ** यदि वृत्त बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं (संपर्क बिंदु पर एक स्पर्शरेखा)।
- **2 स्पर्शरेखाएँ** यदि वृत्त दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।
- **1 स्पर्शरेखा** यदि वृत्त आंतरिक रूप से स्पर्श करते हैं (संपर्क बिंदु पर एक स्पर्शरेखा)।
- **0 स्पर्शरेखाएँ** यदि एक वृत्त दूसरे के पूरी तरह से अंदर है।

3. केंद्रों के बीच की दूरी

- **दूरी सूत्र**:
  केंद्र $C_1(x_1, y_1)$ और $C_2(x_2, y_2)$ वाले दो वृत्तों के लिए:

$$C_1C_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- **वृत्त संपर्क के लिए शर्तें**:
- **बाह्य रूप से स्पर्श**: $C_1C_2 = r_1 + r_2$
- **आंतरिक रूप से स्पर्श**: $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$
- **प्रतिच्छेदन**: $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$
- **एक दूसरे के अंदर**: $C_1C_2 + r_2 < r_1$ (या इसके विपरीत)

महत्वपूर्ण प्रमेय और गुण

1. **स्पर्शरेखा लम्बता**:
   वृत्त की त्रिज्या स्पर्शरेखा के बिंदु पर स्पर्शरेखा रेखा के लंबवत होती है।
2. **समान स्पर्शरेखाएँ**:
   किसी बाह्य बिंदु से एक वृत्त पर खींची गई दो स्पर्शरेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं।
3. **बाह्य और आंतरिक स्पर्शरेखाएँ**:
   दो वृत्तों के लिए, बाह्य स्पर्शरेखाएँ केंद्रों को मिलाने वाले रेखा खंड के बाहर स्थित होती हैं, जबकि आंतरिक स्पर्शरेखाएँ इसे पार करती हैं।

उदाहरण और अनुप्रयोग

उदाहरण 1: बाह्य रूप से स्पर्श करने वाले वृत्त

- **समस्या**: दो वृत्त त्रिज्याओं $r_1 = 5$ और $r_2 = 8$ के साथ दिए गए हैं, जिनके केंद्र $C_1C_2 = 13$ से अलग हैं, उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाओं की संख्या निर्धारित करें।
- **हल**:
  चूँकि $C_1C_2 = r_1 + r_2 = 5 + 8 = 13$, वृत्त बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं।
  परिणाम: **3 उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाएँ** हैं (2 बाह्य और 1 संपर्क बिंदु पर)।

उदाहरण 2: केंद्रों के बीच की दूरी की गणना

- **समस्या**: निम्नलिखित समीकरणों वाले दो वृत्तों के केंद्रों के बीच की दूरी ज्ञात करें:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad (\text{वृत्त } 1)$$

$$(x+3)^2 + (y+9)^2 = 64 \quad (\text{वृत्त } 2)$$

- **हल**:
- वृत्त 1 का केंद्र: $(2, 3)$, त्रिज्या $r_1 = 5$
- वृत्त 2 का केंद्र: $(-3, -9)$, त्रिज्या $r_2 = 8$
- दूरी:

$$C_1C_2 = \sqrt{(2-(-3))^2 + (3-(-9))^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$$

- चूँकि $C_1C_2 = r_1 + r_2$, वृत्त बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं, जो **3 उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाएँ** की पुष्टि करता है।

अवधारणाओं के बीच संबंध

- **त्रिज्या और दूरी**: उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाओं की संख्या केंद्रों के बीच की दूरी और त्रिज्याओं के योग/अंतर के संबंध पर निर्भर करती है।
- **स्पर्शरेखाएँ और ज्यामिति**: स्पर्शरेखाएँ वृत्तों की सापेक्ष स्थितियों द्वारा निर्धारित की जाती हैं, जिन्हें दूरी सूत्र का उपयोग करके गणना की जाती है।
- **समीकरण और ज्यामिति**: एक वृत्त के समीकरण का मानक रूप सीधे तौर पर इसके केंद्र और त्रिज्या से संबंधित होता है, जो स्पर्शरेखाओं और प्रतिच्छेदन का विश्लेषण करने के लिए महत्वपूर्ण है।

निष्कर्ष

यह अध्याय वृत्तों की मौलिक समझ प्रदान करता है, जो उनके समीकरणों, स्पर्शरेखाओं और अंतःक्रियाओं पर जोर देता है। मुख्य निष्कर्षों में शामिल हैं:

1. वृत्त समीकरणों को व्युत्पन्न और व्याख्या करने की क्षमता।
2. वृत्तों के स्पर्श या प्रतिच्छेद करने की शर्तें, और यह कैसे उभयनिष्ठ स्पर्शरेखाओं की संख्या को प्रभावित करता है।
3. केंद्रों और त्रिज्याओं के बीच की दूरी के ज्यामितीय महत्व।

ये अवधारणाएं ज्यामिति और विश्लेषणात्मक गणित में उन्नत विषयों के लिए आवश्यक हैं।

वह वृत्त जो $(1, -2)$ से गुजरता है तथा X-अक्ष को $(3,0)$ पर स्पर्श करता है, किस बिंदु से भी गुजरता है?

1. [ ] $(-5, 2)$
2. [ ] $(2, -5)$
3. [x] $(5, -2)$
4. [ ] $(-2, 5)$

AB वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ की एक जीवा है। A और B पर स्पर्शरिखाएँ C पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि $(2,3)$ AB का मध्य बिंदु है, तो चतुर्भुज $OACB$ का क्षेत्रफल है

1. [ ] $50\sqrt{\frac{13}{3}}$
2. [x] $50\sqrt{\frac{3}{13}}$
3. [ ] $50\sqrt{3}$
4. [ ] $\frac{50}{\sqrt{3}}$

एक समबाहु त्रिभुज के दो शीर्ष $(-1,0)$ और $(1,0)$ हैं तथा तीसरा शीर्ष X-अक्ष के ऊपर स्थित है। इसके परिवृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

1. [ ] $x^2 - y^2 + \frac{2y}{\sqrt{3}} + 1 = 0$
2. [x] $x^2 + y^2 - \frac{2y}{\sqrt{3}} - 1 = 0$
3. [ ] $x^2 - y^2 - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$
4. [ ] इनमें से कोई नहीं

X-अक्ष पर 5 इकाई की लंबाई का अंत:खंड काटने के लिए $(2,0)$ बिंदु से वृत्त खींचे जाते हैं। यदि उनके केंद्र प्रथम चतुर्थांश में स्थित हैं, तो $k > 0$ के लिए उनका समीकरण है

1. [ ] $x^2 + y^2 - 9x + 2ky + 14 = 0$
2. [ ] $3x^2 + 3y^2 + 27x - 2ky + 42 = 0$
3. [x] $x^2 + y^2 - 9x - 2ky + 14 = 0$
4. [ ] $x^2 + y^2 - 2kx - 9y + 14 = 0$

वृत्त (a, b) और $(b, -a)$ बिंदुओं से होकर गुजरता है, जिससे कि इन दो बिंदुओं को मिलाने वाली जीवा परिधि के किसी भी बिंदु पर $45°$ का कोण बनाती है। तो केंद्रों के बीच की दूरी है

1. [ ] $\sqrt{3}$ गुना किसी भी वृत्त की त्रिज्या
2. [ ] 2 गुना किसी भी वृत्त की त्रिज्या
3. [ ] $\frac{1}{\sqrt{2}}$ गुना किसी भी वृत्त की त्रिज्या
4. [x] $\sqrt{2}$ गुना किसी भी वृत्त की त्रिज्या

माना A वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ का केंद्र है। यदि वृत्त पर बिंदु $B(1, 7)$ और $D(4, -2)$ पर स्पर्शरेखाएँ C पर मिलती हैं, तो चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

1. [ ] 78
2. [x] 75
3. [ ] 79
4. [ ] 85

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$ के संकेंद्रित है और उसका क्षेत्रफल दोगुना है।

1. [x] $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 15 = 0$
2. [ ] $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 15 = 0$
3. [ ] $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$
4. [ ] उपरोक्त में से कोई नहीं

यदि रेखा $ax + by = 0$ वृत्त $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$ को स्पर्श करती है और वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ के लिए अभिलंब है, तो (a, b) द्वारा दिया जाता है

1. [ ] $(2, 1)$
2. [ ] $(1, -2)$
3. [x] $(1, 2)$
4. [ ] $(-1, 2)$