अध्याय सारांश: प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

परिचय

यह अध्याय प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणों, प्रांतों, परिसरों और अनुप्रयोगों का अन्वेषण करता है। ये फलन त्रिकोणमितीय अनुपातों से जुड़े समीकरणों को हल करने के लिए आवश्यक हैं और कैलकुलस तथा उच्च गणित में मूलभूत हैं। मुख्य अवधारणाओं में परिभाषाएँ, प्रमुख मान, फलनात्मक संबंध और समस्या-समाधान तकनीकें शामिल हैं।

अध्याय सारांश: प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

परिचय

यह अध्याय प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणों, प्रांतों, परिसरों और अनुप्रयोगों का अन्वेषण करता है। ये फलन त्रिकोणमितीय अनुपातों से जुड़े समीकरणों को हल करने के लिए आवश्यक हैं और कैलकुलस तथा उच्च गणित में मूलभूत हैं। मुख्य अवधारणाओं में परिभाषाएँ, प्रमुख मान, फलनात्मक संबंध और समस्या-समाधान तकनीकें शामिल हैं।

मुख्य अवधारणाएँ और परिभाषाएँ

1. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

- **परिभाषा**: प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय फलनों के प्रतिलोम होते हैं, जो दिए गए अनुपातों के अनुरूप कोणों (विशिष्ट परिसरों में) लौटाते हैं।
- **सामान्य फलन**:
- **$\sin^{-1}x$ (आर्कसाइन)**: प्रांत $[-1, 1]$, परिसर $[-\pi/2, \pi/2]$
- **$\cos^{-1}x$ (आर्ककोसाइन)**: प्रांत $[-1, 1]$, परिसर $[0, \pi]$
- **$\tan^{-1}x$ (आर्कटैन्जेंट)**: प्रांत $\mathbb{R}$, परिसर $(-\pi/2, \pi/2)$
- **$\cot^{-1}x$ (आर्ककोटैन्जेंट)**: प्रांत $\mathbb{R}$, परिसर $(0, \pi)$
- **$\sec^{-1}x$ (आर्कसेकेंट)**: प्रांत $|x| \geq 1$, परिसर $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
- **$\csc^{-1}x$ (आर्ककोसेकेंट)**: प्रांत $|x| \geq 1$, परिसर $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

2. प्रमुख मान

- प्रत्येक प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन के एक **प्रमुख मान** परिसर होता है जो विशिष्टता सुनिश्चित करता है:
- **$\sin^{-1}x$**: $[-\pi/2, \pi/2]$
- **$\cos^{-1}x$**: $[0, \pi]$
- **$\tan^{-1}x$**: $(-\pi/2, \pi/2)$
- **$\cot^{-1}x$**: $(0, \pi)$
- **$\sec^{-1}x$**: $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$
- **$\csc^{-1}x$**: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$

महत्वपूर्ण प्रमेय और गुण

1. फलनात्मक संबंध

- **$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$**
- **$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$**
- **$\sec^{-1}x + \csc^{-1}x = \pi/2$**
- **$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$** (विषम फलन)
- **$\cot^{-1}(-x) = -\cot^{-1}x$** (विषम फलन)
- **$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$**
- **$\csc^{-1}(-x) = -\csc^{-1}x$**

2. योग सूत्र

- **$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}[(x + y)/(1 - xy)]$** ($xy \neq 1$ के लिए)
- **$\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}[(x - y)/(1 + xy)]$** ($xy \neq -1$ के लिए)
- **$\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}[x\sqrt{(1 - y^2)} + y\sqrt{(1 - x^2)}]$** (विशिष्ट शर्तों के अंतर्गत)

3. अवकलज

- **$d/dx\ [\sin^{-1}x] = 1/\sqrt{(1 - x^2)}$**
- **$d/dx\ [\cos^{-1}x] = -1/\sqrt{(1 - x^2)}$**
- **$d/dx\ [\tan^{-1}x] = 1/(1 + x^2)$**
- **$d/dx\ [\cot^{-1}x] = -1/(1 + x^2)$**
- **$d/dx\ [\sec^{-1}x] = 1/(x\sqrt{(x^2 - 1)})$**
- **$d/dx\ [\csc^{-1}x] = -1/(x\sqrt{(x^2 - 1)})$**

अनुप्रयोग और समस्या-समाधान

1. समीकरणों को हल करना

- **उदाहरण**: हल करें **$\sin^{-1}x = \pi/6$** → $x = \sin(\pi/6) = 1/2$.
- **उदाहरण**: हल करें **$\tan^{-1}x + \tan^{-1}(1/x) = \pi/2$** ($x > 0$ के लिए).

2. आलेख और व्यवहार

- **$\sin^{-1}x$**: एकदिष्ट रूप से बढ़ता हुआ, मूल बिंदु के परितः सममित।
- **$\cos^{-1}x$**: एकदिष्ट रूप से घटता हुआ, $x = 0$ के परितः सममित।
- **$\tan^{-1}x$**: $x \to \pm\infty$ के रूप में x-अक्ष की ओर अनंतस्पर्शी।
- **$\cot^{-1}x$**: $x \to 0$ के रूप में x-अक्ष की ओर अनंतस्पर्शी।

3. वास्तविक-विश्व अनुप्रयोग

- **इंजीनियरिंग**: सिग्नल प्रसंस्करण और तरंग विश्लेषण में प्रयुक्त।
- **भौतिकी**: प्रक्षेप्य गति या प्रकाशिकी में कोणों की गणना।
- **कैलकुलस**: त्रिकोणमितीय फलनों से जुड़े समाकलनों का मूल्यांकन।

अवधारणाओं के बीच संबंध

- **प्रांत/परिसर**: फलन का प्रांत इसके प्रतिलोम के परिसर को निर्धारित करता है।
- **प्रमुख मान**: फलनों को एकल-मूल्यवान बनाकर सुसंगत हल सुनिश्चित करते हैं।
- **फलनात्मक सर्वसमिकाएँ**: जटिल व्यंजकों के सरलीकरण की अनुमति देती हैं (उदा., $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$).
- **अवकलज**: कैलकुलस अनुप्रयोगों जैसे अनुकूलन और समाकलन के लिए महत्वपूर्ण।

निष्कर्ष

यह अध्याय गणित में प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के महत्व, उनके गुणों और व्यावहारिक अनुप्रयोगों पर ज़ोर देता है। समीकरणों को हल करने, आलेखों का विश्लेषण करने और वास्तविक दुनिया के परिदृश्यों में उन्हें लागू करने के लिए उनके प्रांतों, परिसरों और संबंधों को समझना महत्वपूर्ण है। इन अवधारणाओं में महारत कैलकुलस, भौतिकी और इंजीनियरिंग में उन्नत समस्या-समाधान को सक्षम बनाती है।

day-27-inverse-trigonometric-function-notes